Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Propostos nº 2

Equações Diferenciais Separáveis, Exactas e Redutíveis a Exactas

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $y' = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2x-4}{2y-2}$

(c) $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1-4v^2}{3v}$ (d) $y' = y\log(y)$

2. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = y(3-x)\,,\quad y(0)=5$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = 1+t^2+y^2+t^2y^2\,,\quad y(0)=1$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\log y}\,,\quad y(\pi)=e$

3. Considere a equação diferencial separável $x\,e^y\operatorname{sen} x - y\,y' = 0$. Determine a solução (na forma implícita) desta equação que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

4. Resolva a equação diferencial

$$y' = (8x+2y+1)^2$$

efectuando a mudança de variável $v = 8x+2y+1$.

5. Considere uma população num ecosistema, $P(t)$, cujo crescimento é proporcional a $P(t)$ e à quantidade de recursos disponíveis. A quantidade de recursos disponíveis é proporcional a $\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)$, onde M é a *capacidade de carga* (a população máxima que os recursos do ecosistema conseguem suportar). A função $P(t)$ evolui de acordo com a *equação logística*:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right)$$

Admitindo que $P(0) = P_0 \geq 0$.

a) Sendo $x(t) = \frac{P(t)}{M}$ e $x_0 = \frac{P_0}{M}$, escreva o problema de valor inicial satisfeito por $x(t)$ e resolva-o.

b) Determine $P(t)$ para qualquer $t \geq 0$, e calcule o $\lim_{t\to\infty} P(t)$. Esboce os gráficos das soluções obtidas nos casos $P_0 = 0$, $0 < P_0 < M$, $P_0 = M$ e $P_0 > M$.

6. Mostre que qualquer equação separável,

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

é exata.

7. Determine a solução dos problemas de Cauchy

(a) $xy^2 + x + yx^2y' = 0\ ,\ y(1) = 1$ **(b)** $\cos y + (y^2 - x \operatorname{sen} y)y' = 0\ ,\ y(0) = 1$

8. Determine o factor integrante e a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y - (x + 6y^2)y' = 0\ ,\ y(1) = 1$ **(b)** $5x^2 - y^2 + 2yy' = 0\ ,\ y(0) = -3$

(c) $x + y + \operatorname{tg}(x)y' = 0\ ,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1$ **(d)** $2y + (x - \operatorname{sen}\sqrt{y})y' = 0\ ,\ y(2) = \pi^2$

9. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ye^y - 2x}$$

(a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

10. Mostre que a equação diferencial

$$x^2 + y^2 - x - y\frac{dy}{dx} = 0$$

admite um factor integrante da forma $\mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$ e resolva a equação.

Soluções

1. **(a)** $ye^{y^2} = Ke^{\operatorname{sen} x}$, $K \in \mathbb{R}$
   (b) $y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$ ou $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$, $C \in \mathbb{R}$
   (c) $4v^2 - 1 = \frac{C}{\sqrt[3]{x^8}}$, $C \in \mathbb{R}$
   (d) $y(t) = e^{Ke^t}$, $K \in \mathbb{R}$

2. **(a)** $y(x) = 5e^{3x - \frac{x^2}{2}}$ **(b)** $y(t) = \operatorname{tg}(t + \frac{t^3}{3} + \frac{\pi}{4})$ **(c)** $y(1 - \log y) = 1 + \cos x$

3. $(1 + y)e^{-y} = x \cos x - \operatorname{sen} x + 1$

4. $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + c)$, com $c \in \mathbb{R}$

5. **(a)** $x' = kx(1 - x)$, $x(0) = x_0$, $x(t) = \frac{x_0 e^{kt}}{1 + x_0(e^{kt} - 1)}$, para $t \in \mathbb{R}$.
   (b) $P(t) = \frac{MP_0 e^{kt}}{M + P_0(e^{kt} - 1)}$.

6.

7. **(a)** $y(x) = \sqrt{\frac{2 - x^2}{x^2}}$ **(b)** $3x \cos y + y^3 - 1 = 0$

8. **(a)** $\mu(y) = y^{-2}$; $y(x) = \frac{5 + \sqrt{25 + 24x}}{12}$ **(b)** $\mu(x) = e^{-x}$; $y(x) = -\sqrt{5(x^2 + 2x + 2) - e^x}$
   (c) $\mu(x) = \cos x$; $y(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\operatorname{sen} x} - x - \operatorname{cotg} x$ **(d)** $\mu(y) = 1/\sqrt{y}$; $x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = 2\pi - 1$

9. **(a)** $\mu(y) = y$ **(b)** $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y + e = 0$

10. $\mu(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$; $y(x) = \sqrt{ce^{2x} - x^2}$ ou $y(x) = -\sqrt{ce^{2x} - x^2}$, com $c > 0$.