

Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2026/2027
Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 1
Superfícies

1. Determine se os pontos $P(3, -1, 5)$ e $Q(-1, 3, 4)$ pertencem à superfície parametrizada por $g(u, v) = (u + v, u^2 - v, u + v^2)$.
2. Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:
 - (a) o plano que passa pelos pontos $(1, 2, -3)$, $(2, 3, -4)$ e $(2, 1, -2)$.
 - (b) A porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.
 - (c) A porção no primeiro octante do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.
 - (d) A parte do plano $z = x + 3$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
3. Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por
 - (a) $g(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$ com $u^2 + v^2 < 1$
 - (b) $g(u, v) = (2 \sin u, 3 \cos u, v)$, $0 < v < 2$
 - (c) $g(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \frac{1}{v^2})$ com $0 \leq u < 2\pi$ e $v > 0$.
 - (d) $g(u, v) = (u + v, 3 - v, 1 + 4u + 5v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$.
4. Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \sin v$, $z = c \sinh u$, representam um hiperbolóide com uma folha.
5. Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, orientada para fora.
6. Se $g(u, v)$ define uma superfície numa vizinhança do ponto indicado, determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u, v)$ no ponto dado.
 - (a) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$ em $u = 1$, $v = 1$.
 - (b) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$ no ponto $(2, 3, 0)$.
 - (c) $g(u, v) = (\arctg(uv), e^{u^2 - v^2}, u - v)$ no ponto $g(1, -1)$.
7. Considere o parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

- (a) Determine uma representação paramétrica $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície.
 (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.
8. Seja $d(s) = s^2(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}$. Considere a parametrização

$$g(s, t) = (s, d(s) \cos t, d(s) \sin t).$$

Mostre que g **não** define uma superfície regular em qualquer vizinhança do ponto $g(0, 0)$.

1 Soluções

- P pertence à superfície e Q não pertence à superfície.
- $x = 1 + u + v, y = 2 + u - v, z = -3 - u + v$ com $u, v \in \mathbb{R}$.
 - $x = u, y = 4 \cos \theta, z = 4 \sin \theta$ com $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 - $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = r$, com $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
 - $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), z = 3 + r \cos(\theta)$, onde $0 \leq r < 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \geq 0$.
 - Parte do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em $0 \leq z \leq 2$.
 - Gráfico de $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.
 - O plano $4x - y - z = -4$.
- Note que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- Sendo a superfície dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, então (por exemplo)

$$\vec{N}(x, y, z) = \frac{1}{2} \nabla F = (x, y, z)$$

e

$$\nu(x, y, z) = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) = \frac{1}{3} (x, y, z)$$

para cada (x, y, z) satisfazendo $F(x, y, z) = 0$.

- $x + y - 2z = 0$.
 - $3x - y + 3z = 3$.
 - $(x, y, z) = (-\frac{\pi}{4}, 1, 2) + s(-\frac{1}{2}, 2, 1) + t(\frac{1}{2}, 2, -1)$, $s, t \in \mathbb{R}$ ou $2x + z = 2 - \frac{\pi}{2}$.
- $x = u, y = v, z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, com $u, v \in \mathbb{R}$.
 - $\frac{2\pi}{a}x + z = -\pi^2$.