TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre $2023/2024$

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Propostos nº 1

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

$$(\mathbf{a})\ x - y' = xy \qquad (\mathbf{b})\ y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

(a) $\dfrac{dy}{dt} = -ye^t$ **(b)** $y' = x^3 - 2xy$ **(c)** $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

(d) $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^t, \quad t > 0$ **(e)** $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{3x} \operatorname{sen} x$ **(f)** $\dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t\cos t$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

(a) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y-1) = 0, \quad y(0) = 1$ **(b)** $\dfrac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi) = 1$

(c) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t}y = \dfrac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$ **(d)** $\dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t\cos t, \quad y(\pi) = 0$

(e) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$ tomando-se $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

4. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0. A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

(a) Encontre a solução $x(t)$

(b) Calcule a *meia-vida*, ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a "meia-vida" não depende da concentração inicial.

5. Considere a equação diferencial

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções contínuas e n é número real diferente de 0 e de 1. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $y' + \dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 1$

(b) $y' = 5y - \dfrac{4x}{y}, \quad y(0) = -\dfrac{1}{5}$

7. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

8. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação logistica

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

1 Soluções de 1.2

1. (a) sim; (b) não

2. **(a)** $y(t) = ce^{-e^t}$ **(b)** $y(x) = \frac{1}{2}\big(x^2 - 1\big) + ce^{-x^2}$ **(c)** $y(x) = 2x + ce^{-x}$

   (d) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$ **(e)** $y(x) = e^{3x}(c - \cos x)$ **(f)** $y(t) = (t^2 + ct)\cos t$

   com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.

3. **(a)** $y(x) = 1$ **(b)** $y(t) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{\pi - t}\Big)$ **(c)** $y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$

   (d) $y(t) = (t^2 - \pi t)\cos t$

   (e) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se} \quad t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$

4. **(a)** $x(t) = x_0 e^{-at}$ **(b)** $T = \frac{\log 2}{a}$.

5. **(a)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ **(b)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ e $I_{\text{Max}} = \big]0, \infty\big[$

6. **(a)** $y(x) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$ **(b)** $y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2-e^{10x}}}{5}$

7. **(a)** $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} + \Big(\frac{2}{t} + 1\Big)\psi = -\psi^2$

   (b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2\Big(\int \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt + C\Big)}$