Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre $2023/2024$

Curso: LEQ, LEAmb, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 11

Equações Diferenciais Parciais

1 Exercícios Resolvidos

1. Mostrar que a função
$$u(x,t) = e^{mx}e^{-mt}$$
é uma solução da equação de calor
$$u_{xx} + mu_t = 0$$
para qualquer que seja o valor da constante m.

Resolução:

Substituindo $u(t,x)$ na equação, obtém-se
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{mx}e^{-mt}\right) + m\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{mx}e^{-mt}\right) = m^2e^{mx}e^{-mt} - m^2e^{mx}e^{-mt} = 0$$
como se queria mostrar.

2. Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas.

(a) $u_t = u_y$ com $u(0,y) = e^y - 4e^{2y}$.

(b) $u = u(x,y)$, tal que $u_x = u_y - u$ com $u(x,0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$.

Resolução:

(a) Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções $u(t,y)$ verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogénea;

- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (dita não homogénea) não pode ser incluida no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas, $T(t)$ e $Y(y)$, tais que $u(t,y) = T(t)Y(y)$ verifica a equação diferencial. Substituindo em $u_t = y_y$, obtém-se:

$$T'(t)Y(y) = T(t)Y'(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de t enquanto o segundo é uma função apenas de y, e que a igualdade se verifica para todos os (t,y) em $\mathbb{R}^2$, então ambos os membros são iguais a uma constante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

ou seja,

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad \text{e} \quad Y'(y) = \lambda Y(y)$$

Trata-se de equações diferenciais ordinárias facilmente resolúveis, pois ambas são lineares homogéneas de primeira ordem. Assim

$$T(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad Y(y) = c_2 e^{\lambda y},$$

pelo que

$$u(t,y) = c e^{\lambda(t+y)}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

A resolução anterior não introduziu qualquer restrição aos valores de λ, pois para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtêm soluções não nulas da forma (1).

Vamos agora determinar os valores das constantes c e λ de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados iniciais,

$$u(0,y) = e^y - 4e^{2y}$$

são uma combinação linear (em $t = 0$, obviamente) de funções do tipo (1) correspondentes aos valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(t,y) \;=\; c_1 e^{t+y} + c_2 e^{2(t+y)}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar c_1 e c_2, obtém-se:

$$u(0,y) = c_1 e^y + c_2 e^{2y} = e^y - 4e^{2y} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 1 \;\text{ e }\; c_2 = -4.$$

A solução do problema dado é, pois:

$$u(t,y) \;=\; e^{t+y} - 4e^{2(t+y)}.$$

(b) Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções $u(x,y)$ verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogénea;
- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial (em $y = 0$) e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (que é não homogéna) não pode ser incluida no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas, $X(x)$ e $Y(y)$, tais que $u(x, y) = X(x)Y(y)$ verifica a equação diferencial. Substituindo em $u_x = u_y - u$, obtém-se:

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) - X(x)Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de x, enquanto o segundo é uma função apenas de y, e que a igualdade se verifica para todo o (x, y) em $\mathbb{R}^2$, então ambos os membros são iguais a uma constante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desta forma, tem-se que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1 = \lambda$$

Resolvendo ambas as equações (que são equações ordinárias lineares de primeira ordem lineares, ambas homogéneas) obtém-se

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x}$$

e

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Y(y) = c_2 e^{(\lambda+1)y}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Assim, qualquer função da forma

$$u(x, y) = ce^{\lambda x}e^{(\lambda+1)y}, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2}$$

é solução da equação diferencial.

Vamos agora calcular as constantes de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados na fronteira

$$u(x, 0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$$

são uma combinação linear (em $y = 0$, obviamente) de funções do tipo (2) correspondentes aos valores $\lambda = -5$, $\lambda = -7$ e $\lambda = 13$. Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(x, y) \; = \; c_1 e^{-5x}e^{-4y} + c_2 e^{-7x}e^{-6y} + c_3 e^{13x}e^{14y}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar c_1, c_2 e c_3, obtém-se:

$$u(x, 0) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-7x} + c_3 e^{13x} = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pelo que $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = -14$. Concluimos então que

$$u(t, y) \; = \; e^{-5x}e^{-4y} + 2e^{-7x}e^{-6y} - 14e^{13x}e^{14y}$$

é solução do problema dado.

3. Determinar os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valor de fronteira (PVF).

   (a) $y'' - \lambda y = 0$ com $y'(0) = 0\ ,\ y(L) = 0$

   (b) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0$ com $y\,(0) = 0$ e $y\,(1) = 0.$

   Resolução:

(a) Vamos, em primeiro lugar, determinar a solução geral da equação diferencial. Utilizando a notação $Dy = y'$, a equação toma a forma:

$$y'' - \lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)y = 0.$$

O polinómio característico associado é, pois, $P(R) = R^2 - \lambda$. Vamos, então, considerar os três casos que se seguem.

Caso 1: $\lambda = 0$. O polinómio característico tem 0 como raiz dupla, pelo que a equação $D^2 y = 0$ admite como base do espaço de soluções (por exemplo) $\mathcal{B} = \{1,\, x\}$. Desta forma, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$\begin{array}{rclcll} y'(0) & = & 0 & \Rightarrow & (a+bx)'\Big|_{x=0} = 0 & \Rightarrow \quad b = 0 \\ y(L) & = & 0 & \Rightarrow & a = 0 & \end{array}$$

Conclui-se que a única solução do PVF no caso $\lambda = 0$ é a solução nula, pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio do problema.

Caso 2: $\lambda > 0$. O polinómio característico tem como raízes (ambas de multiplicidade 1) $\pm\mu$, onde $\mu \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}$. Assim sendo, a equação $(D^2 - \mu^2)y = (D-\mu)(D+\mu)y = 0$ admite como base do espaço de soluções $\mathcal{B} = \{e^{\mu x},\, e^{-\mu x}\}$, pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$\begin{array}{l} y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (ae^{\mu x} + be^{-\mu x})'\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a \\ y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\big(\underbrace{e^{\mu L} + e^{-\mu L}}_{>0}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \end{array}$$

Tem-se então que $a = b = 0$, donde se conclui que a única solução do PVF no caso $\lambda > 0$ é a solução nula. Desta forma, qualquer que seja $\lambda > 0$, λ não é valor próprio do problema.

Caso 3: $\lambda < 0$ As raízes do polinómio característico são os números complexos conjugados

$$\pm i\sqrt{-\lambda} = \pm i\mu, \qquad \text{onde } \mu = \sqrt{-\lambda} > 0, \ \ \lambda = -\mu^2$$

Desta forma, a equação diferencial $(D^2 + \mu^2)y = (D - i\mu)(D + i\mu)y = 0$ admite como base do espaço de soluções $\mathcal{B} = \{\text{sen}\,(\mu x), \cos(\mu x)\}$, pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = a\text{sen}\,(\mu x) + b\cos(\mu x), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(a\text{sen}\,(\mu x) + b\cos(\mu x)\big)'\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad b\cos(\mu L) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \ \vee \ \cos(\mu L) = 0$$

As soluções não nulas não podem verificar $a = b = 0$, pelo que é necessário que

$$\cos(\mu L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu L = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\pi}{2L} + \frac{n\pi}{L} = \frac{(1+2n)\pi}{2L}$$

com $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (note que $\mu > 0$). Como b pode então ser um número real arbitrário, obtêm-se as seguintes soluções não nulas do PVF:

$$y(x) = b\cos\frac{(1+2n)\pi x}{2L}, \qquad \text{com } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Para $\mu L \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ então obrigatoriamente $b = a = 0$, pelo que a única solução existente, nesses casos, é a solução nula.

Podemos então concluir que os valores próprios do problema são

$$\lambda_n = -\frac{(1+2n)^2\pi^2}{4L^2}, \qquad \text{com } \ n \in \mathbb{N}_0,$$

sendo o espaço das funções próprias associadas a este λ_n gerado pela função:

$$y_n(x) = \cos\frac{(1+2n)\pi x}{2L}.$$

(b) A equação característica associada é

$$R^2 - 2R + (1+\lambda) = 0 \ \Leftrightarrow \ R = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$$

Separamos o estudo das soluções em três casos, dependendo do tipo de raízes encontradas.

Caso 1: $\lambda = 0$**.** O polinómio característico tem uma raiz $R = 1$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições de fronteira para determinar A e B, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Bxe^x$$

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad Be = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Resulta que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

Caso 2: $\lambda < 0$. Seja $\omega = \sqrt{-\lambda} \geq 0$, o que implica que $\lambda = -\omega^2$. O polinómio característico tem duas raízes reais distintas, $R = 1 \pm \omega$, pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{(1+\omega)x} + Be^{(1-\omega)x} = e^x\Big(Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}\Big)$$

Usando as condições de fronteira para determinar A e B, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^x\big(e^{\omega x} - e^{-\omega x}\big)$$
$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\,e\big(\underbrace{e^{\omega} - e^{-\omega}}_{>0}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = 0$$

Resulta pois que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que $\lambda < 0$ não é valor próprio do problema.

Caso 3: $\lambda > 0$. Seja $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$, o que implica que $\lambda = \omega^2$. O polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas, $R = 1 \pm i\omega$, pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\omega x) + Be^x \cos(\omega x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\omega x)$$
$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\,e \operatorname{sen}\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \ \vee \ \omega = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(note que $\omega > 0$). Para cada $\lambda = \omega^2 = n^2\pi^2$ obtêm-se as soluções não nulas

$$y(x) \ = \ A\,e^x \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Podemos então concluir que os valores própios do problema são

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad \text{para} \ \ n \in \mathbb{N},$$

sendo o espaço das funções próprias associado a este valor próprio gerado pela função

$$y_n(x) \ = \ e^x \operatorname{sen}(n\pi x).$$

4. Determine a solução da equação diferencial parcial

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad , \qquad x \in \,]0, \pi[\ \ \text{e } t > 0$$

que verifica as condições de fronteira

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

e a condição inicial

$$u(x,0) = \text{ sen }(x) - 2 \text{ sen }(5x).$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x) \;\Rightarrow\; \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,\pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u(t,\pi) = 0 \;\Rightarrow\; X(\pi) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } \; x \in]0,\pi[\\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

e

$$T' = \lambda \alpha^2 T \tag{4}$$

Para resolver (3), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio característico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; B\pi = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0 \; \forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A\Big(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\, \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\text{sen}\,(\mu x) + B\text{cos}\,(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A\text{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A\text{sen}\,\pi\mu = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \pi\mu = k\pi\ k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = \text{sen}\,(kx)$. Note que todas as outras — dadas por $y(x) = A\text{sen}\,(\mu x)$ — são combinações lineares de $X_k(x)$.

Podemos agora resolver (4), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (3) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = -\alpha^2 k^2 T \Rightarrow T(t) = Ce^{-\alpha^2 k^2 t}$$

A menos de combinação linear, tomamos $T(t) = e^{-\alpha^2 k^2 t}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) = e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}\,(kx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e consequentemente qualquer combinação linear também o será. Desta forma:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}\,(kx).$$

Para calcular as constantes A_k, utilizamos a condição inicial:

$$u(0, x) = \text{sen}\,x - 2\text{sen}\,(5x).$$

Assim

$$u(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\text{sen}\,(kx)=\text{sen}\,x-2\text{sen}\,(5x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k=\begin{cases}1 & \text{se } k=1\\ -2 & \text{se } k=5\\ 0 & \text{se } k\neq 1\ ,\ k\neq 5\end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x)=e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x)-2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$$

5. (a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t\geqslant 0$ e para $x\in[0,1]$ de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u & \text{se } x\in\,]0,1[\,,\ \ t>0\\ u(0,t)=0 & \text{se } t>0\\ u(1,t)=\text{sen}\,1 & \text{se } t>0\end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0)=3\text{sen}\,(2\pi x)-7\text{sen}\,(4\pi x)+\text{sen}\,x \qquad \text{para } x\in\,]0,1[\,.$$

Resolução:

(a) Dado que as condições de fronteira não são homogéneas, vamos considerar

$$u(x,t)=v(x)+w(x,t)$$

em que $v(x)$ é a solução do problema

$$\begin{cases}0=v''(x)+v(x) & \text{se } x\in\,]0,1[\\ v(0)=0\\ v(1)=\text{sen}\,1\end{cases} \tag{5}$$

e $w(x,t)$ é solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+w & \text{se } x\in\,]0,1[\,,\ t>0\\ w(0,t)=0 & \text{se } t>0\\ w(1,t)=0 & \text{se } t>0\end{cases} \tag{6}$$

Comecemos por resolver o problema (5). Trata-se de uma equação ordinária linear de coeficientes constantes, cujas raízes do polinómio característico são

$$R^2+1=0\ \Leftrightarrow\ R=\pm i.$$

Assim sendo, a solução geral da equação é

$$v(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Dado que $v(0) = 0$, tem-se que $A = 0$, pelo que $v(x) = B\operatorname{sen} x$. Por outro lado, dado que $v(1) = \operatorname{sen} 1$ tem-se $B = 1$ e

$$v(x) = \operatorname{sen} x.$$

Para resolver o problema (6) utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $w(x,t) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obtemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \;\Rightarrow\; \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,1[$ tem que existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)} \;=\; \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$w(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0;$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula,

$$w(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$w(1,t) = 0 \;\Rightarrow\; X(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0,1[\\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

e

$$T' = (1+\lambda)T \tag{8}$$

Para resolver (7), temos que procurar os valores e funções próprias do problema. O polinómio característico da equação diferencial tem as raízes:

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0\,\forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -A \;\Rightarrow\; y(x) = A\Big(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0\,\forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\text{sen}\,(\mu x) + B\cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = A\text{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; A\text{sen}\,\mu = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \text{ ou } \mu = k\pi\; k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2\pi^2$ é valor próprio da equação associado ás funções próprias $X(x) = B\text{sen}\,(k\pi x)$. A menos de combinação linear, podemos tomar $X_k(x) = \text{sen}\,(k\pi x)$

Podemos agora resolver (8), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (7) é a solução nula, que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (1 - k^2\pi^2)T \;\Leftrightarrow\; T(t) = Ce^{(1-k^2\pi^2)t}$$

Podemos então tomar $T_k(t) = e^{(1-k^2\pi^2)t}$.

Concluimos que para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$w_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = e^{(1-k^2\pi^2)t}\text{sen}\,(k\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira (6), e consequentemente qualquer combinação linear também o será; ou seja,

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}\,(k\pi x)$$

Finalmente

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) = \text{sen}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}\,(k\pi x)$$

é a solução pedida.

(b) Pela alínea anterior

$$u(x,0) = \text{sen}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}\,(k\pi x) = 3\text{sen}\,(2\pi x) - 7\text{sen}\,(4\pi x) + \text{sen}\,x$$

pelo que teremos que determinar os coeficientes A_k de modo a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}\,(k\pi x) = 3\text{sen}\,(2\pi x) - 7\text{sen}\,(4\pi x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } \; k = 2 \\ -7 & \text{se } \; k = 4 \\ 0 & \text{se } \; k \neq 2 \;, \; k \neq 4 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(x,t) = \text{sen}\,x + 3e^{(1-4\pi^2)t}\text{sen}\,(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t}\text{sen}\,(4\pi x)$$

6. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \; x \in]0, L[\,, \;\; \text{com} \; \begin{cases} u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0 \\ u(t,x) = \cos\,(3\pi x/L). \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x) \;\Rightarrow\; \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0, L[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{T} + 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t, 0) = 0 \;\Rightarrow\; X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t, L) = 0 \;\Rightarrow\; X'(L) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } \; x \in]0, L[\\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

e

$$T' = (\lambda - 1)T \tag{10}$$

Para resolver (9), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio característico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx \;\Rightarrow\; y'(x) = B$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = A$$

Por outro lado $y'(L) = 0$ verifica-se qualquer que seja A pelo que $\lambda = 0$ é valor próprio com funções próprias $X(x) = A = A \cdot 1$. A menos de combinação linear, podemos tomar $X_0(x) = 1$.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \;\Rightarrow\; y'(x) = \mu\Big(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}\Big)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow B = A \Rightarrow y(x) = A\Big(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \, \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\mathsf{sen}\,(\mu x) + B\mathsf{cos}\,(\mu x) \Rightarrow y'(x) = \mu\Big(A\mathsf{cos}\,(\mu x) - B\mathsf{sen}\,(\mu x)\Big)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = B\mathsf{cos}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \Rightarrow -B\mu\mathsf{sen}\, L\mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } L\mu = k\pi \; k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio, podendo tomar para função própria associada $X_k(x) = \mathsf{cos}\,(\frac{k\pi}{L}x)$.

Podemos agora resolver (10), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (9) é a solução nula, que não nos interessa). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1)T \qquad \text{pelo que} \qquad T_k(t) = e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t}$$

e, para $\lambda = 0$,

$$T'(t) = -T(t) \qquad \text{pelo que} \qquad T_0(t) = e^{-t}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) = e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t}\mathsf{cos}\,\frac{k\pi x}{L}$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como

$$u_0(t, x) = e^{-t}$$

Consequentemente qualquer combinação linear também o será, ou seja

$$u(t, x) \;=\; A_0 e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, e^{\left(-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} - 1\right)t} \mathsf{cos}\,\frac{k\pi x}{L}$$

Para calcular as constantes A_k, $k \in \mathbb{N}_0$, vamos utilizar a condição inicial

$$u(0,x) \;=\; \cos\frac{3\pi x}{L}.$$

Assim

$$u(0,x) \;=\; A_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{L} \;=\; \cos\frac{3\pi x}{L}$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } \; k=3 \\ 0 & \text{se } \; k \neq 3 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x) = e^{\left(-\frac{9\pi^2}{L^2}-1\right)t} \cos\frac{3\pi x}{L}$$

7. A equação de calor bidimensional (isto é, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) é dada por

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$$

   (a) Supondo que $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, determinar as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por X, Y e T

   (b) Determinar soluções não nulas, $u(x,y,t)$, da equação diferencial que satisfaçam as condições de fronteira

$$u(0,y,t) = 0 \quad , \quad u(a,y,t) = 0 \quad , \quad u(x,0,t) = 0 \quad , \quad u(x,b,t) = 0,$$

   onde o domínio do problema é dado por: $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$ e $t \geq 0$.

Resolução:

(a) Vamos encontrar soluções não nulas da equação do calor bidimensional da forma indicada. Substituindo na equação obtém-se

$$T'(t)X(x)Y(y) \;=\; \alpha^2\Big(T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)\Big)$$

ou seja

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t e o segundo membro uma função de (x,y), a única forma de a igualdade se verificar para todos os t, x e y é que ambas sejam igual a uma constante, Assim, para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \;=\; \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \;=\; \lambda$$

Repetindo o procedimento com a equação em (x, y)

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda$$

O primeiro membro é uma função apenas de x, enquanto o segundo membro uma função apenas de y. Assim sendo, a única forma de a igualdade se verificar para todos os x e y é que ambos os membros da mesma sejam igual a uma constante. Assim, para certos valores de $\mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \qquad \text{e} \qquad \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu$$

Os cálculos anteriores mostram que as funções $T(t)$, $X(x)$ e $Y(y)$ satisfazem as equações diferenciais

$$T'(t) = \lambda\alpha^2 T(t), \qquad X''(x) - \mu X(x) = 0, \qquad Y''(y) - (\lambda - \mu)Y(y) = 0,$$

onde λ e μ são constantes reais.

(b) Começando pelas condições de fronteira em $x = 0$ e $x = a$:

$$u(0, y, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t)X(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \equiv 0 \ \vee \ X(0) = 0 \ \vee \ Y(y) \equiv 0$$

Dado que as opções $T(t) \equiv 0$ e $Y(y) \equiv 0$ implicam que a solução $u(t, x, y) \equiv 0$, tem-se que $X(0) = 0$. Da mesma forma,

$$u(a, y, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(a) = 0$$

Quanto às condições de fronteira em $y = 0$ e $y = b$, usando os mesmos argumentos:

$$u(x, 0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0$$

$$u(x, b, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0$$

Obtivémos assim o problema de valores próprios

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 & \text{para } \ x \in \,]0, a[\\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

cujos valores e funções próprias são

$$\mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por seu turno, para cada n temos que resolver

$$\begin{cases} Y''(y) - (\underbrace{\lambda - \mu_n}_{\kappa})Y(y) = 0 & \text{para } \ y \in \,]0, b[\\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

Trata-se de um problema de valores próprios, onde κ é o valor próprio associado à solução $Y(y)$. Assim sendo, temos

$$\kappa_{n,m} = \lambda_{n,m} - \mu_n = -\frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n,m} = \left(-\frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2$$

$$\text{e} \qquad Y_{n,m}(y) = \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}.$$

A nossa notação é justificada pelo facto de termos obtido um valor próprio (e correspondente função própria) para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Finalmente, resolvendo a equação (para cada $\lambda_{n,m}$ anteriormente calculado)

$$T' = \lambda\alpha^2 T \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{\lambda\alpha^2 t},$$

pelo que

$$T_{n,m}(t) = e^{-\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2\alpha^2 t}$$

As soluções do problema homogéneo que obtivémos pelo método de separação de variáveis são:

$$\begin{aligned} u_{n,m}(x,y,t) &= T_{n,m}(t)\, X_n(x)\, Y_{n,m}(y) \\ &= e^{-\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}, \qquad \text{para} \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

8. Considerar o problema de valores de fronteira

$$y'' + \lambda y = f(t) \quad , \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{11}$$

(a) Mostre que se λ for um valor próprio do problema homogéneo, então o problema proposto

(1) pode não ter solução

(2) a solução (quando existe) não é única;

(b) Mostrar que este problema tem uma só solução $y(t)$ se λ não é um valor próprio do problema homogéneo.

Resolução:

Os valores próprios e funções próprias para o problema de Dirichlet homogéneo,

$$\begin{cases} (D^2+\lambda)y = 0, & \text{para } \ 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

podem-se obter substituindo λ por $-\lambda$ no problema de valores próprios com condições de fronteira de Dirichlet (resolvido na aula). Resulta assim que os mesmos são:

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2\pi^2 \\ y_n(t) = \text{sen}\,(n\pi t) \end{cases} \qquad \text{para } \; n \in \mathbb{N}.$$

(a) Conforme a hipótese desta alínea, admitimos que $\lambda = p^2\pi^2$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pela função própria associada a λ, $y_p(t) = \text{sen}\,(p\pi t)$, e integrando entre 0 e 1, obtém-se:

$$\int_0^1 y''(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds + \lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds = \int_0^1 f(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds$$

Integrando por partes o primeiro integral, e tendo em conta que $\text{sen}\,(p\pi) = \text{sen}\,0 = 0$ e $y(0) = y(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 y''(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds &= \underbrace{y'(s)\text{sen}\,(p\pi s)\Big|_0^1}_{0} - p\pi \int_0^1 y'(s)\cos\,(p\pi s)\,ds \\ &= \underbrace{-p\pi y(s)\cos\,(p\pi s)\Big|_0^1}_{0} - p^2\pi^2 \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds \\ &= -\lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds \end{aligned}$$

Desta forma, se $y(t)$ for solução do problema então tem-se necessariamente que

$$\int_0^1 f(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds = 0. \tag{13}$$

Em conclusão, se $\lambda = p^2\pi^2$ para certo $p \in \mathbb{N}$:

(1) Se f não verificar a condição (13), então o problema não tem solução.

(2) Se f verificar a condição (13), e admitindo que existe pelo menos uma solução particular, $\tilde{y}(t)$, do problema, então qualquer função da forma

$$y(t) = \tilde{y}(t) + c\,\text{sen}\,(p\pi t), \qquad \text{com } \; c \in \mathbb{R},$$

é também solução do problema — isto para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Note que $\text{sen}\,(p\pi t)$ é solução da equação homogénea associada e $y(0) = y(1) = 0$.

Note ainda que a condição (13) significa que, para o problema (12) ter solução, é necessário que o coeficiente de ordem p da série de senos de f seja nulo.

(b) Vamos procurar uma solução do problema (11) na forma de uma sobreposição de funções próprias do problema homogéneo:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi t). \tag{14}$$

De facto, trata-se da representação em série de senos de y no intervalo $[0, 1]$. Fazendo o mesmo com o termo não homogéneo,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}\,(n\pi t),$$

e substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\pi^2 + \lambda) b_n \text{sen}\,(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}\,(n\pi t)$$

Temos então que

$$b_n = \frac{f_n}{\lambda - n^2\pi^2} \tag{15}$$

Note que esta solução está bem definida desde que λ não seja um dos valores próprios. Também é necessário que a série defina uma função de classe C^2. Não iremos aqui discutir este problema; apenas notamos que se f for de classe C^1 então a série (14) com os coeficientes (15) pode ser derivada termo a termo pelo menos duas vezes. E isso justifica o cálculo, acima efectuado, da solução do problema.

Quanto à unicidade, suponhamos que y_1 e y_2 são duas soluções do problema. Então $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ satisfaz o problema homogéneo associado (12). Mas como λ não é valor próprio, a única solução do problema homogéneo é $y(t) \equiv 0$. Resulta assim que $y_1 = y_2$.

9. Determinar a solução do problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 3 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases}$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

Resolução:

Dado que as condições de fronteira são nulas e a equação é homogénea, vamos começar por resolver o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \ , \ 0 < x < 3 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases} \tag{16}$$

onde também incluímos a condição inicial nula, por forma a facilitar os cálculos. Vamos procurar soluções não nulas de (16) usando o método de separação de variáveis. Consideramos, então, $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Substituindo na equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Leftrightarrow \quad XT'' = c^2 X'' T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

O primeiro membro é uma função de t e o segundo membro uma função de x; a única forma de a igualdade se verificar para todos os $x \in]0,3[$ e $t > 0$ é que ambas sejam igual a uma constante. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em $x = 0$ e $x = 3$, tem-se que

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \equiv 0 \quad \vee \quad X(0) = 0$$

Dado que a opção $T(t) \equiv 0$ implica $u(x,t) \equiv 0$, para obter soluções não nulas tem-se necessariamente que $X(0) = 0$. Da mesma forma

$$u(3,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(3) = 0$$

Quanto à condição inicial homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0)X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0) = 0 \quad \vee \quad X(x) \equiv 0$$

Dado que a opção $X(x) \equiv 0$ implica $u(x,t) \equiv 0$, devemos ter $T'(0) = 0$. Temos então dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \begin{cases} T'' - c^2 \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

(P1) Trata-se de um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet para $x \in [0,3]$. Assim os valores próprios são

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{9} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

correspondentes às soluções não nulas

$$X_n(x) = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

(P2) Trata.se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial. Evidentemente que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que λ é valor próprio de (P1). Vamos, por isso, resolver a equação (para cada $n \in \mathbb{N}$)

$$T'' + c^2 \frac{n^2\pi^2}{9} T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(D^2 + \frac{n^2\pi^2 c^2}{9}\right) T = 0.$$

A sua solução geral, calculada pelo método usual, é

$$T(t) = A \cos \frac{n\pi ct}{3} + B\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{3}$$

Dado que $T'(0) = 0$,

$$T'(0) = \frac{n\pi c}{3}\Big(- A\,\text{sen}\,\frac{n\pi ct}{3} + B\cos\frac{n\pi ct}{3}\Big)\Big|_{t=0} = \frac{n\pi c}{3} B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0.$$

Assim, para a solução de (P2) para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi ct}{3}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \cos\frac{c\,n\pi t}{3}$$

é solução de (16). Então

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \cos\frac{c\,n\pi t}{3}$$

é a solução geral de (16).

Finalmente, há que determinar as constantes A_n de forma a que seja verificada a condição inicial não homogénea, isto é

$$u(0,x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

Para podermos resolver este problema apenas precisamos de escrever a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

como uma série de senos em $[0,3]$. Essa série tem a forma

$$SF_{\text{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

em que para $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx$$

Primitivando por partes tem-se que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx &&= -\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}dx \\ & &&= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_2^3 (3-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx &&= -\frac{3(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{n\pi}\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{3}dx \\ & &&= \frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$I_2 = \int_1^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^2 = \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Então

$$A_n = a_n = \frac{2}{3}\Big(I_1 + I_2 + I_3\Big) = \frac{6}{n^2\pi^2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\Big)$$

Finalmente a solução do problema enunciado é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\Big)\cos\frac{n\pi ct}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$$

10. Determinar a solução do seguinte problema de valores de fronteira

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < a \;\; , \;\; 0 < y < b$$

satisfazendo as condições (de fronteira)

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,b) = f(x) \quad , \quad u(0,y) = 0 \quad , \quad u(a,y) = f(y).$$

Assumimos que f uma função contínua em $[0, \max\{a, b\}]$.

Resolução:

Vamos procurar uma solução do problema na forma $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, onde $v(x,y)$ é solução de

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x,0) = v(x,b) = 0 \quad \text{e} \quad v(0,y) = 0 \\ v(a,y) = f(y) \end{cases} \tag{17}$$

e $w(x,y)$ é solução de

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(0,y) = w(a,y) = 0 \quad \text{e} \quad w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = f(x) \end{cases} \tag{18}$$

O domínio de ambos os problemas é dado por $x \in [0,a]$ e $y \in [0,b]$.

Vamos começar por resolver (17) considerando para já a equação diferencial (de Laplace) e todas as condições de fronteira nulas. Ou seja, vamos usar o método de separação de variáveis para obter soluções não nulas do problema homogéneo

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x,0) = v(x,b) = v(0,y) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

onde $x \in [0,a]$ e $y \in [0,b]$. Vamos então procurar soluções da forma $u(x,t) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação de Laplace,

$$v_{xx} = -v_{yy} \quad \Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{função só de } x} = \underbrace{-\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{função só de } y}$$

A única forma de a igualdade (entre funções de variáveis $x \in]0,a[$ e $y \in]0,b[$ independentes) se verificar é que ambos os membros da igualdade sejam iguais a uma mesma constante. Nesta altura, podemos antever que o problema de valores próprios será em $Y(y)$ pois, de acordo com (19), este terá duas condições de fronteira nulas enquanto o problema em $X(x)$ só terá uma. Como tal, colocamos o sinal negativo no primeiro membro.

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

O leitor poderá verificar que se tivéssemos deixado o sinal onde estava, iríamos obter um problema de valores próprios (ligeiramente) diferente daquele cujo resultado pretendemos usar. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em $y = 0$ e $y = b$, tem-se que

$$v(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x)Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0 \quad \vee \quad Y(0) = 0$$

Dado que $X(x) \equiv 0$ implica que a solução $v(x,y)$ seja identicamente nula (que não pretendemos obter aqui), consideramos apenas $Y(0) = 0$. Da mesma forma (dado que pretendemos calcular soluções não nulas)

$$v(x,b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0$$

e, também,

$$v(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0.$$

Obtivémos assim dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \end{cases} \qquad (\mathbf{P2}) \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

(P2) Trata-se de um problema de valores próprios para a equação $Y'' - \lambda Y = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet, no domínio dado por $y \in [0,b]$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, os valores próprios são

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

a cada um dos quas corresponde a função própria

$$Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

(P1) Trata.se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial. Nota-se que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que λ é valor próprio de (P2). Vamos então resolver a equação (para cada $n \in \mathbb{N}$):

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) X = 0.$$

A sua solução geral é

$$X(x) = A\, e^{\frac{n\pi x}{b}} + B\, e^{-\frac{n\pi x}{b}}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Para resolver a equação de Laplace é conveniente escrever esta solução solução em termos das funções hiperbólicas sh $\frac{n\pi x}{b}$, ch $\frac{n\pi x}{b}$ — que são ambas combinações lineares das exponenciais $e^{\frac{n\pi x}{b}}$ e $e^{-\frac{n\pi x}{b}}$ e, por isso, foram uma outra base do espaço de soluções de $\left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)X = 0$. Assim sendo:

$$X(x) = c \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + d \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}, \qquad c, d \in \mathbb{R}.$$

Dado que $X(0) = 0$ tem-se que $d = 0$ e a solução de (P1), para cada $n \in \mathbb{N}$, é

$$X_n(x) = \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

(a menos de combinação linear). Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\text{sh}\,\frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Formalmente

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\text{sh}\,\frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Para concluir o cálculo da solução de (17), há que determinar as constantes c_n de modo a que

$$v(a,y) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh}\,\frac{n\pi a}{b}\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b} = f(y) \quad \forall y \in [0,b]$$

Tem-se então que os valores $c_n \text{sh}\,\frac{n\pi a}{b}$ são os coeficientes da série de senos de $f(y)$ em $[0,b]$, ou seja

$$c_n \text{sh}\,\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

e, como tal,

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\text{sh}\,\frac{n\pi x}{b}, \qquad \text{com} \;\; c_n = \frac{2}{b\,\text{sh}\,\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

é a solução de (17).

Para resolver o problema (18), notamos que se trocarmos as variáveis x e y, este problema transforma-se no problema (17) (desde que troquemos também os parâmetros a e b, pois à partida $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$). Isto decorre da simetria da equação de Laplace relativamente às suas variáveis. Assim sendo, a solução de (18) é

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\text{sh}\,\frac{n\pi y}{a}, \qquad \text{com} \;\; d_n = \frac{2}{a\,\text{sh}\,\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\,dx$$