

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Ficha de Problemas nº 10 (Aula Online)

Equações Diferenciais Parciais

1. Considere o problema de valor inicial e fronteira para $u: [0, \pi] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (2 - \sin t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \text{com } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cossenos de $f(x)$ indicando a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial e fronteira.

(2º Teste ACED 2012/13 1º Sem.)

2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos de $f(x)$ indicando os valores para os quais a série obtida converge, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < 2, t > 0) \\ u(t, 0) = u(t, 2) = 0, \\ u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x). \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } t \geq 0$$

(2º Teste ACED 2010/11 1º Sem.)

3. Determine a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \\ u(x, 0) = 0 \text{ e } u(x, \pi) = \sin(3x) - \sin(5x) \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

(Exame ACED 2014/15 1º Sem.)