

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/2025

Cursos: Todos

EXAME DE ÉPOCA EXTRAORDINÁRIA, VERSÃO A

3 DE SETEMBRO DE 2025, 9H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 2h.

1. Considere a equação diferencial:

$$\operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} = y.$$

(a) (1 val.) Determine a solução geral.

(b) (1 val.) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, então qual o valor de $y(\frac{\pi}{4})$?

2. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y - \cos t + (t + \sin y) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

(a) (1 val.) Mostre que a equação é exacta em $\mathbb{R}^2$.

(b) (1 val.) Escreva a solução do problema de valor inicial na forma implícita.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) (1 val.) Verifique que:

$$e^{At} = (\operatorname{ch} t) I + (\operatorname{sh} t) A.$$

Sugestão. Use a definição da exponencial de uma matriz e calcule A^2 .

(b) (1 val.) Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y. \end{cases} \quad x(0) = a, \quad y(0) = b.$$

Para que valores de a e b a solução do problema é limitada em $\mathbb{R}^+$.

4. Considere a equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = e^x.$$

(a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) (2 val.) Uma solução particular da equação diferencial é:

A. $-\frac{1}{2}xe^x$

B. $-2e^x$

C. $-e^x$

D. xe^x

5. (1 val.) Um vector normal unitário à superfície definida por $z = xy^2$ no ponto $(1, 1, 1)$ é

- A. $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$ B. $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2, -3, 1)$ C. $(-1, -2, 1)$ D. $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$

6. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, xz^2, y^2),$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$$

orientada pela normal unitária exterior.

- (a) (1 val.) Determine o fluxo do campo F através da superfície S na direcção da normal unitária dada.
- (b) (2 val.) Sendo $\Sigma = \{(x, y, z) \in S : z < 0\}$ orientada com a normal unitária com terceira componente positiva, calcule o fluxo de F através de Σ .
- (c) (2 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do $\text{rot } F$ através da superfície Σ .

7. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\sin t + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } x \in]0, \pi[, t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{para } t > 0, \\ u(0, x) = \pi x & \text{para } x \in]0, \pi[. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) (1 val.) Determine a série de senos da restrição ao intervalo $[0, \pi]$ da função $f(x) = \pi x$. Diga, justificadamente, qual é o valor desta série em $x = -\pi$.
- (b) (2 val.) Determine a solução $u(t, x)$ do problema (1).

8. (2 val.) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^2 y} (y^2 - y)(9 - y^2), \quad y(0) = 2.$$

Mostre que o problema admite uma única solução, definida em $\mathbb{R}$ e calcule o $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.