

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Cursos: Todos

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL, VERSÃO A

15 DE JULHO DE 2026, 15H30

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 2h.

1. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\cos^2 x} \quad y(\pi) = 1.$$

- (a) (1 val.) A solução geral da equação é:

A. $\frac{x^3}{3} + x + C$ B. $e^{\tan x} + C$ C. $Ce^{\tan x}$ D. Ce^{x^2+1}

- (b) (1 val.) O intervalo máximo de existência de solução é:

A. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ B. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ C. $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ D. $\mathbb{R}$ E. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

2. (2 val.) Considere a seguinte equação diferencial:

$$y - \cos x + (x + \sin y)y' = 0.$$

Mostre que a equação é exacta em $\mathbb{R}^2$ e determine a solução da equação que verifica $y(\pi) = 0$ (na forma implícita).

3. Considere os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (e^{zy}, y^2 + z^3, x + y + z) \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = (x, z^3 + x^2, 2yz)$$

- (a) (1 val.) Qual dos seguintes campos admite um potencial vectorial em $\mathbb{R}^3$?

A. G B. $F + G$ C. $F - G$ D. F

- (b) (2 val.) Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo escolhido em (a) através da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -1 + \sqrt{x^2 + z^2} \text{ e } -1 < y < 0 \right\}$$

orientada pela normal unitária com segunda componente negativa.

4. Seja S a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 < z < 2$, orientada pela normal unitária ν com primeira componente positiva no ponto $(1, 0, 1)$. Seja $F(x, y, z) = (z, x, y)$.

- (a) (1 val.) Verifique que $G(x, y, z) = \left(0, xy, zy - \frac{x^2}{2} \right)$ é um potencial vectorial para F .

- (b) (1 val.) Caracterize o bordo, ∂S , da superfície S . Deve indicar a(s) parametrização(ões) relevante(s)).

O valor do fluxo de F através de S é dado por:

A. $\int_{\partial S} \text{rot } F \cdot d\gamma$ B. $\int_{\partial S} G \cdot d\gamma$ C. $\int_{\partial S} \text{rot } G \cdot d\gamma$ D. $\int_{\partial S} F \cdot d\gamma$

5. Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 3y = 8e^t - 3.$$

- (a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
 (b) (1 val.) Indique todas as respostas correctas. Uma solução particular da equação diferencial é:

A. $e^t - 1 + 10e^{-t}$ B. $e^t - 1$ C. -1 D. e^t

(b) _____

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (2 val.) Determine e^{At} .
 (b) (1 val.) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = (1, -1) \end{cases}.$$

7. (1 val.) Seja $f(x) = |x|$, com $x \in [-\pi, \pi]$ e $SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. $b_n = 0$ se $n \in \mathbb{N}$ B. $a_0 = 0$ C. $a_n = 0$ se $n \in \mathbb{N}$ D. $b_n = a_n$ se $n \in \mathbb{N}$

8. (2 val.) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{para } x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(0, x) = \sum_{n=1}^{2026} \frac{2}{n} \sin(nx) & \text{para } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = (y^3 - y)(9 - y^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- (a) (2 val.) Mostre que a solução existe, é única, e está definida em $\mathbb{R}$.
 (b) (1 val.) O valor do $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ é

A. -1 B. 0 C. 3 D. 1 E. -3