

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEAmb, LEMat, LEQ, LEIC-A

EXAME — VERSÃO A

17 DE JANEIRO DE 2024, 8H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 2h.

1. (2 val.) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$4x^3 \cos^2 y + (\sin y - x^4 \sin(2y)) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Mostre que a equação diferencial é exacta em $\mathbb{R}^2$.
(b) Determine explicitamente a solução do problema, indicando o intervalo máximo de solução.

2. (3 val.) Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule e^{At} .
(b) Determine a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -3x + y + 3e^t \end{cases} \quad (1)$$

que satisfaz as condições iniciais

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

3. (3 val.) Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = 4e^t - t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
(b) Calcule a solução do problema.
(c) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais todas as soluções da equação diferencial

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0 \text{ satisfazem } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

4. (3 val.) Seja S a superfície

$$S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\}$$

e considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, 2(1 - z))$$

- (a) Calcule $\text{div } F$.
- (b) Calcule a área de S .
- (c) Utilizando o teorema da divergência, calcule o fluxo de F através da superfície S na direção da normal S com terceira componente positiva (note que a superfície não é fechada).

5. (3 val.) Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2).$$

- (a) Calcule $\text{rot } F$.
- (b) Utilize o teorema de Stokes para calcular o trabalho de F ao longo do caminho γ que consiste na intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 2 - y$ percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(0, 0, 5)$.

6. (4 val.) Considere o problema de valor inicial e fronteira para $u: [0, \pi] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (3 + \sin t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Determine a série de cossenos de $f(x)$ indicando a soma da série para cada $x \in [-\pi, \pi]$.
- (b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira (2).

7. (2 val.) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t + \sin(ty), \quad y(0) = 2.$$

- (a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de 0.
- (b) Determine o intervalo máximo de solução.
- (c) Mostre que a solução do problema de valor inicial é uma função par.
Sugestão: considere $x(t) = y(-t)$.