Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022, 22/02/2022

Exame 2 – Versão A

Cursos: LENO, LEEC e LEMec

1. Considere o problema de valor inicial

$$2t\left(1+y^2\right) + y' = 0 \qquad , \qquad y(0)=1$$

(1,5 val) **(a)** Determine a solução geral na forma explícita.

(1,0 val) **(b)** Determine o intervalo máximo de solução e indique o comportamento da solução dos extremos desse intervalo.

(2,5 val) **2.** Determine a solução do problema de valor inicial na forma implícita e justifique a existência de solução local.

$$2x \operatorname{sen} y + y^2 + \left(2xy + x^2 \cos y\right)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad , \qquad y(1)=0$$

3. Considere a equação diferencial:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos(2t)}$$

(0,5 val) **(a)** Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(0,5 val) **(b)** Determine a matriz wronskiana.

(1,0 val) **(c)** Calcule a solução geral da equação.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val) **(a)** Determine e^{At}.

(0,5 val) **(b)** Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

em que $b=-a=1$.

(1,0 val) **(c)** Verifique que a solução determinada na alínea (b), não é limitada em $\mathbb{R}$. Determine os valores de a e b de forma a que a solução do PVI seja limitada em $\mathbb{R}$.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 = y^2 + z^2 \ , \ 1 < x < 2\right\}$$

orientada com a normal unitária $\nu = (\nu_x,\, \nu_y,\, \nu_z)$ tal que $\nu_x > 0$. Seja

$$G(x,y,z) = (2x, -y, -z)$$

(1,0 val) **(a)** Calcule a área de S.

(0,5 val) **(b)** Mostre que $\Phi(x,y,z) = \big(0, -xz, xy\big)$ é um potencial vectorial para G em $\mathbb{R}^3$.

(1,5 val) **(c)** Calcule

$$\iint_S G \cdot \nu \, dS$$

usando o teorema da divergência **ou** o teorema de Stokes.

6. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{se } \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(1,5 val) **(a)** Determine o desenvolvimento em série de senos de f, indicando a soma da série no intervalo $[-1,1]$.

(2,0 val) **(b)** Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in \left]0,1\right[\setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

(1,5 val) **7.** Determine a função cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 - 6s + 13} + \frac{2}{s^2 - 6s + 13}$$

8. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -2t(1+y^2)e^{1-y} \quad , \quad y(0) = 1$$

(0,5 val) **(a)** Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.

(1,5 val) **(b)** Mostre que o intervalo máximo de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 0$ tal que $\lim\limits_{t \to \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: se necessário, use a solução do problema 1.