Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/2023, 23/01/2023

Exame – Versão A

Cursos: LEEC, LEIC-A

(2,0 val) 1. Considere o sólido $E \subset \mathbb{R}^3$ limitado pela superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2\right\}$$

e pelo plano $z = 0$. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) \;=\; \left(z + 2x^2y,\, 3y - 2xy^2,\, -z\right).$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo de F através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido E. Note que S não é igual à fronteira de E.

2. Considere a superfície

$$S \;=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z + 2 = \sqrt{x^2 + y^2}\;,\; 0 < z < 1\right\}$$

orientada com a normal unitária ν tal que a sua terceira componente negativa.

(1,0 val) (a) Determine um campo vectorial A da forma

$$A(x,y,z) \;=\; \big(xy,\, 0,\, \alpha(x,y)\big)$$

tal que $\operatorname{rot} A = H$, onde $H(x,y,z) = (y, x, -x)$.

(1,0 val) (b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial H através de S no sentido da normal ν.

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, apresentando a solução na forma explicíta e determinando os intervalos máximos das respectivas soluções:

(2,0 val) (a) $\dfrac{dy}{dt} + 3(t^2-1)y = t^2 - 1 \quad , \qquad y(0) = \dfrac{1}{3}$

(2,0 val) (b) $y^2 + t + 2ty\,\dfrac{dy}{dt} = 0 \qquad , \qquad y(1) = 1$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2,0 val) (a) Determine e^{At}.

(1,0 val) (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \qquad \mathbf{y}(0) = (0,0,-1)$$

em que $\mathbf{b}(t) = (0, 0, e^t)$.

5. Considere a equação diferencial

$$y'' + y' = f(t),$$

onde f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(1,0 val) (a) Resolva a equação homogénea associada.

(1,5 val) (b) Sendo $f(t) = -2\operatorname{sen} t$, determine a solução da equação diferencial que verifica as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

(1,0 val) (c) Determine uma função $f(t)$ tal que todas as soluções da equação são não limitadas em $[0, +\infty[$.

6. Considere a função f definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por

$$f(x) = \pi - x$$

(1,5 val) (a) Determine a série de senos associada a f e indique a sua soma para cada $x \in [0, 2\pi]$.

(2,0 val) (b) Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u & \text{para} \quad x \in]0, 2\pi[\ , \ t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{para} \quad x \in]0, 2\pi[\end{cases}$$

(2,0 val) 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(x+1) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(y + t)\,, \quad y(0) = -1$$

tem solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$, e determine o intervalo máximo a que a solução pode ser prolongada.