Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022, 10/02/2022

Exame – Versão A

Cursos: LENO, LEEC e LEMec

(2,0 val) 1. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' - \frac{2}{t}y = t \qquad , \qquad y(1) = 2$$

para $t > 0$.

Resolução:

Trata-se de uma equação linear de 1ª ordem com $a(t) = \frac{1}{t}$. Note que $a(t)$ está definida e é continua em $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ($b(t)$ não tem problemas de continuidade). Como $t_0 = 1 > 0$, então a solução do PVI linear vai estar definida em $I =]0, +\infty[$.

O factor integrante é dado por

$$\mu(t) = \exp\left(-\int \frac{2}{t}\,dt\right) = t^{-2}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{t}y = t \quad &\Leftrightarrow \quad t^{-2}\left(y' - \frac{2}{t}y\right) = \frac{1}{t} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(t^{-2}y\right)' = \frac{1}{t} \\
&\Leftrightarrow \quad t^{-2}y = \log t + c \qquad\qquad \text{(note que } t > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{\log t + c}{t^{-2}} = t^2(\log t + c)
\end{aligned}$$

Usando a condição inicial $y(1) = 2$ obtém-se $c = 2$; assim, a solução do PVI é

$$y(t) = t^2(\log t + 2) \qquad \text{para} \ \ t \in]0, +\infty[\,.$$

2. Considere o problema de valor inicial

$$xy^2 + e^x y - x \; + \; \left(e^x + x^2 y + y\right)\frac{dy}{dx} \; = \; 0, \qquad\qquad y(0) = 1$$

(0,5 val) (a) Verifique que a equação é exacta.

(1,5 val) (b) Determine uma função ϕ tal que $\phi(x, y) = C$, com $C \in \mathbb{R}$, define implicitamente a solução geral da equação.

(1,0 val) (c) Determine explicitamente a solução do problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de solução.

Solução:

(a) A equação diferencial

$$\underbrace{xy^2 + e^x y - x}_{M(x,y)} + \underbrace{\left(e^x + x^2 y + y\right)}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0$$

verifica $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$ para qualquer $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ e, por isso, é exacta em $\mathbb{R}^2$. Isto significa que existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = (M, N)$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Sendo a equação exacta, isso significa que existe um campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = (M, N)$ em $\mathbb{R}^2$; isto é,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 + e^x y - x \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + e^x y - \frac{x^2}{2} + g(y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = e^x + x^2 y + y \quad \Rightarrow \quad x^2 y + e^x + g'(y) = e^x + x^2 y + y$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = y \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^2}{2} + C_1,$$

onde C_1 é uma constante real. Desta forma, a solução geral da equação diferencial na forma implícita é

$$\frac{x^2y^2}{2} + e^x y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = K, \quad \text{onde} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Uma forma mais simples desta solução obtém-se multiplicando ambos os membros por 2:

$$x^2y^2 + 2e^x y - x^2 + y^2 = C, \quad \text{onde} \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Usando a condição inicial $y(0) = 1$, resulta que $C = 3$, pelo que

$$(1 + x^2)y^2 + 2e^x y - (3 + x^2) = 0.$$

Explicitando esta solução, obtém-se

$$y(x) = \frac{-2e^x + \sqrt{4e^{2x} + 4(1 + x^2)(3 + x^2)}}{2 + 2x^2}$$

(onde o sinal positivo resulta de $y(0) = 1$). O intervalo máximo de existência de solução é determinado pelas condições:

$$0 \in I_{\mathsf{max}} \ \wedge \ 4e^{2x} + 4(1 + x^2)(3 + x^2) > 0 \ \wedge \ 2 + 2x^2 \neq 0$$

Sendo as duas últimas condições universais, obtém-se $I_{\mathsf{max}} = \mathbb{R}$.

3. Considere a equação diferencial:

$$y''' \ + \ y'' \ = 12t. \tag{1}$$

(1,0 val) (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(2,0 val) (b) Determine a solução geral da equação (1).

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é

$$y''' \ + \ y'' \ = 0$$

que pode ser escrita na forma

$$(D^3+D^2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D^2(D+1)y = 0 \quad \Leftarrow \quad D^2 y = 0 \ \vee \ (D+1)y = 0$$

Uma base do espaço de soluções de $D^2y = 0$ é (por exemplo) 1 e t; e uma base do espaço de soluções de $(D+1)y = 0$ é (por exemplo) e^{-t}. Assim, a solução pedida é

$$y_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} \quad , \quad c_1, \ c_2, \ c_3 \in \mathbb{R}$$

(b) A solução geral de (4) é

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

em que y_H é solução geral da equação homogénea (determinada em (a), e y_P é uma solução particular da equação. Para a determinar vamos usar o método dos coeficientes indeterminados (note que $b(t) = 12t$ é solução de uma equação linear de coeficientes constantes e por isso o método é aplicável). O polinómio aniquilador de t é $P_A(D) = D^2$. Aplicando à equação

$$D^2\Big(D^2(d+1)\Big) = D^2(12t) \quad \Leftrightarrow \quad D^4(D+1)y = 0$$

Uma base do espaço de soluções de $D^4y = 0$ é (por exemplo) 1, t, t^2 e t^3 e uma base do espaço de soluções de $(D+1)y = 0$ (por exemplo) e^{-t}. Assim, a solução é

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2 t + c_3\, e^{-t}}_{\substack{\shortparallel \\ y_H(t)}} + ct^2 + dt^3$$

por isso a forma da solução particular é $y_p(t) = ct^2 + dt^3$. Temos agora que determinar os coeficientes c e d para que y_p verifique a equação (1). Assim

$$y''' \ + \ y'' \ = 12t \quad \Leftrightarrow \quad (ct^2+dt^3)''' + (ct^2+dt^3)'' = 12t \quad \Leftrightarrow \quad 6dt + 2c + 6d = 12t$$

Como a igualdade é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, $6d = 12$ e $2c + 6d = 0$ ou seja $d = 2$ e $c = -6$. Então

$$y_p(t) = -6t^2 + 2t^3$$

e a solução geral de (1) é

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} - 6t^2 + 2t^3 \quad , \quad c_1, \ c_2, \ c_3 \in \mathbb{R}$$

4. Considere a matriz

$$A \ = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val) (a) Determine e^{At}.

(1,0 val) (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= 3x - y + 2e^{2t} \\ y' &= x + y \end{cases}$$

com $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$.

Solução:

(a) Os valores próprios de A são dados por:

$$\det A - \lambda I = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2.$$

Os vectores próprios de A são as soluções de

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

Assim, A tem apenas os vectores próprios $v = (b, b) = b(1, 1)$, onde $b \in \mathbb{R}$, pelo que o valor próprio $\lambda = 2$ tem apenas um vector próprio linearmente indepedente; tomamos $v_1 = (1, 1)$. Isto significa que A é não diagonalizável.
Determinando um vector próprio generalizado:

$$(A - \lambda I)v = v_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = b + 1.$$

Os vectores próprios generalizados são da forma $v = (b + 1, b) = (b, b) + (1, 0) = b(1, 1) + (1, 0)$, com $b \in \mathbb{R}$, pelo que podemos tomar $v_G = (1, 0)$. Resulta pois que $A = SJS^{-1}$, com

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}$$

Outra resolução de (a):
Para determinar e^{At} começamos por resolver o sistema homogéneo associado, isto é

$$\begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em ordem a x, obtém-se

$$x = y' - y \tag{2}$$

Substituindo na primeira equação (do sistema)

$$(y' - y)' = 3(y' - y) - y \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-2)^2 y = 0$$

Uma base para o espaço de soluções desta equação é, por exemplo, e^{2t} e te^{2t}. Sendo assim teremos

$$y(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$$

em que a e b são constantes reais. Substituindo em (2) obtemos

$$x = \Big(ae^{2t} + bte^{2t}\Big)' - ae^{2t} - bte^{2t} = e^{2t}\Big(a + b + bt\Big)$$

então a solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}\Big(a+b+bt\Big) \\ ae^{2t} + bte^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e concluimos que a matriz

$$S(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

é uma (MST) para o sistema. Vist $S(0)$ não se a matriz identidade, temos finalmente que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}$$

(b) Note que o sistema de equações é equivalente à equação vectorial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}'}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbf{y}'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbf{b}(t)}}$$

Usando a fórmula da variação das constantes (com $\mathbf{y}_0 = (0, -1)$):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad = \quad \mathbf{y}(t) \quad &= \quad e^{At}\left(\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-As}\,\mathbf{b}(s)\,ds\right) \\
&= \quad e^{At}\left(\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-2s} \begin{bmatrix} 1-s & s \\ -s & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right) \\
&= \quad e^{At}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2-2s \\ -2s \end{bmatrix} ds\right) \\
&= \quad e^{At}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t - t^2 \\ -t^2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t - t^2 \\ -1 - t^2 \end{bmatrix} \\
&= \quad e^{2t} \begin{bmatrix} 3t + t^2 \\ t^2 + t - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5. Considere o campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = (x,\ y,\ -2z+2)$$

e seja S o parabolóide $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$, com $z > 0$ munido com normal $\vec{\nu}$ com terceira componente positiva.

(1,0 val) (a) Calcule a área de S.

(1,0 val) (b) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através de S no sentido de $\vec{\nu}$.

(1,5 val) (c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $F(x,y,z)$ através da superfície S no sentido da normal $\vec{\nu}$ (note que a superfície não é fechada).

Resolução:

(a) Trata-se da porção do paraboloide $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$ que se encontra acima do plano $z = 0$. Podemos usar a parametrização

$$g(x,y) \ = \ \big(x,\, y,\, 8 - 2x^2 - 2y^2\big) \quad , \quad (x,y) \in D = \big\{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 < 4\big\}$$

A área de S é dada por

$$A(S) = \iint_S dS \ = \ \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dxdy \ = \ \iint_D \left\| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -4x \\ 0 & 1 & -4y \end{vmatrix} \right\| dxdy$$

$$= \ \iint_D \Big\| (4x, 4y, 1) \Big\| \, dxdy \ = \ \iint_D \sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}\, dxdy$$

Mudando para coordenadas polares

$$A(S) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\big(16r^2 + 1\big)^{1/2}\, d\theta dr = 2\pi \frac{1}{32} \frac{(16r^2+1)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{24}\Big(65^{3/2} - 1\Big)$$

(b) Pelo Teorema de Stokes

$$\mathrm{Fluxo}(\mathrm{rot}\, F) = \iint_S \mathrm{rot}\, F \cdot \nu \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dg$$

em que ∂S é obtida pela intersecção de s com o plano $z = 0$, ou seja

$$\partial S = \big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4\ ,\ z = 0\big\}.$$

Vamos parametrizar ∂S por

$$g(\theta) = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0) \quad , \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\,,$$

onde se considerou a curva percorrida no sentido positivo para ser compatível com o sentido da normal. Então

$$\mathrm{Fluxo}(\mathrm{rot}\, F) = \int_0^{2\pi} (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2) \cdot (-2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta = 0$$

(c) Tem-se que

$$\mathrm{Fluxo}(F) = \iint_S F \cdot \nu \, dS$$

Dado que S não é uma superfície fechada (não é a fronteira de um sólido) para podermos aplicar o Teorema da divergência há que "tapar" S. Assim considere-se

$$\Sigma = S \cup B$$

em que $B = \{(x.y) \, : \, x^2 + y^2 \leq 4 \; , \; z = 0\}$ munida com a normal $\nu_B = (0, 0, -1)$ (sendo assim o fluxo será na direcção da normal exterior a Σ). Tem-se então que o fluxo de F através de Σ é dado por

$$\iint_\Sigma F \cdot N \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dxdydz = 0$$

dado que a divergência do campo F é zero. Por outro lado

$$0 = \iint_\Sigma F \cdot N \, dS = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_B F \cdot \nu_B \, dS$$

pelo que

$$\begin{aligned} \text{Fluxo}(F) &= -\iint_B F \cdot \nu_B \, dS = -\iint_B (x, y, 2) \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= \iint_B 2 \, dB = 2 \, A(B) = 8\pi \end{aligned}$$

[2,0 val.] 6. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi \;\; , \;\; t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = 0 \, ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 6 \operatorname{sen}(2x) - 15 \operatorname{sen}(5x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solução:

Começamos por determinar soluções não nulas do problema homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \,]0, \pi[\; , \;\; t > 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = 0 & x \in \,]0, \pi[\, . \end{cases} \tag{3}$$

Para tal, consideremos $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação, obtém-se

$$T''(t)X(x) = 9T(t)X''(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Para que a igualdade se verifique para todo $x \in]0, \pi[$ e todo o $t > 0$, ambas os membros da igualdade anterior têm que ser constantes (e iguais à mesma constante,

$\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \lambda \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \,.$$

Por outro lado, considerando as condições de fronteira,

$$u(t,0) = 0 \ \Rightarrow \ T(t)X(0) = 0 \ \Rightarrow \ T(t) \equiv 0 \ \text{ou} \ X(0) = 0 \,.$$

Como $T(t)$ não pode ser a função nula (isso implicaria que também $u(t,x) = T(t)X(x)$ seria a função nula), é necessário que $X(0) = 0$. Da mesma forma,

$$u(t,\pi) = 0 \ \Rightarrow \ X(\pi) = 0 \,.$$

$$u(0,x) = 0 \ \Rightarrow \ T(0) = 0.$$

Então o problema da determinação de soluções não nulas de (3) da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ dividiu-se em

$$\textbf{(P1)} \ \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad , \quad \textbf{(P2)} \ \begin{cases} T'' - 9\lambda T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

O problema $(\mathbf{P1})$ é um problema de valores próprios relativo à equação $(D^2 - \lambda)X = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet no intervalo $[0,\pi]$. Assim, os valores próprios são $\lambda_n = -n^2$, e as correspondentes soluções não nulas (funções próprias) são $X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para qualquer outro valor de λ, a única solução de $(\mathbf{P1})$ é $X(x) \equiv 0$, que não é o que pretendemos.

Resolvemos agora $(\mathbf{P2})$ para cada um dos valores próprios de $(\mathbf{P1})$. O polinómio característico da equação diferencial $T'' + 9n^2 T =$ é $P(R) = R^2 + 9n^2$, sendo as suas raízes $R = \pm 3ni$. Desta forma, a solução geral é

$$T(t) = A\cos(3nt) + B\operatorname{sen}(3nt)$$

Tendo em conta a condição $T(0) = 0$, então $A = 0$, pelo que $T_n(t) = \operatorname{sen}(3nt)$.

Conclui-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $u_n(t,x) = \operatorname{sen}(3nt)\operatorname{sen}(nx)$ é solução do problema (3) e, assim, a solução de (3) é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(3nt)\operatorname{sen}(nx) \,.$$

Finalmente há que determinar os valores das constantes A_n de forma a que $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 6\operatorname{sen}(2x) - 15\operatorname{sen}(5x)$; ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3nA_n \operatorname{sen}(nx) = 6\operatorname{sen}(2x) - 15\operatorname{sen}(5x).$$

Conclui-se que $A_2 = 1$, $A_5 = -1$ e $A_n = 0$ se $n \in \mathbb{N} \setminus \{2,5\}$, pelo que a solução do problema de valores iniciais e de fronteira é:

$$u(t,x) = \operatorname{sen}(6t)\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(15t)\operatorname{sen}(5x).$$

[1,5 val.] 7. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

dada por

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

e indique a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[0,5 val.] (b) Use a alínea anterior para determinar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Resolução:

(a) Começamos por observar que a função f é par e, assim, a sua série de Fourier é uma série de cosenos. Tem-se então que

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big)$$

em que $b_n = 0$ para todo o n,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)\, dx = -\frac{4\pi^2}{3}$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\cancel{(x^2 - \pi^2) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} 2x \operatorname{sen}(nx)\, dx \right) \\
&= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx \right) \\
&= \frac{4}{n^2} (-1)^n
\end{aligned}$$

Pelo que a série de Fourier de f é

$$SF_f(x) = -\frac{4\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos(nx) = -\frac{4\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

Como f é seccionalmente C^1 e contínua em $[-\pi, \pi]$, e verifica $f(-\pi) = f(\pi)$, a soma da série no intervalo $[-\pi, \pi]$ é

$$SF_f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi^2 & \text{se} \quad -\pi < x < \pi \\ \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} & \text{se} \quad x = \pm\pi \end{cases} = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Em consequência, a série de Fourier de f é igual (em $\mathbb{R}$) à extensão periódica (de período 2π de f a $\mathbb{R}$.

(b) Para calcular a série (numérica) pedida, vamos usar a série de Fourier de F calculada num ponto x apropriado, de modo a que, para o valor escolhido de x, se tenha

$$\frac{1}{n^2} (-1)^n \cos nx = \frac{1}{n^2}.$$

Facilmente se verifica que se escolhermos $x = \pi$ ($x = -\pi$ também serve), obtém-se o resultado desejado. Pela convergência de $SF_f(x)$, estudada na alínea (a), temos assim que, para $x = \pi$

$$SF_f(\pi) = -\frac{4\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(n\pi) = f(\pi)$$

ou seja

$$0 = -\frac{4\pi^2}{6} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n(-1)^n = -4\frac{\pi^2}{6} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Desta forma, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (4 - y^2)e^{\cos^2 y} \qquad , \qquad y(0) = 0 \tag{4}$$

[1,5 val.] (a) Mostre que o problema (4) tem uma única solução definida em $\mathbb{R}$.

[0,5 val.] (b) Sendo $y(t)$ a solução de (4), determine

$$\lim_{t \to +\infty} y(t)$$

Solução:

(a) A função $g(t, y) = f(y) = (4 - y^2)e^{\cos^2 y}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, sendo por isso contínua e localmente lipschitziana em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard-Lindelöf, o problema de valor inicial tem solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$. Sendo que

$$f(y) = (2 - y)(2 + y)e^{\cos^2 y}$$

então $f(y) = 0$ se e só se $y = 2$ ou $y = -2$. Os pontos ± 2 designam-se de *pontos fixos* da equação diferencial, pois esta tem as soluções constantes:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2 \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ y_2(t) &= 2 \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Considere-se agora a solução do problema de valor inicial, $y(t)$ definida em I, cuja existência foi estabelecida em (a). De novo pelo teorema de Picard-Lindelöf (neste caso, por unicidade de solução), o grafico de $y(t)$ não pode intersectar os gráficos de $y_1(t) = -2$ e $y_2(t) = 2$. Assim sendo,

$$-2 < y(t) < 2 \qquad \text{para qualquer } \; t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Pelo teorema de extensão de solução, o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

(b) Devido a (5), temos para qualquer $t \in \mathbb{R}$ que $\big(2 - y(t)\big)\big(2 + y(t)\big) > 0$. Mas então

$$y'(t) \;=\; f\big(y(t)\big) \;=\; \big(2 - y(t)\big)\,\big(2 + y(t)\big)\,e^{\cos^2 y(t)} \;>\; 0,$$

ou seja, $y(t)$ é crescente e, também por (5), limitada. Isto implica que existe

$$c = \lim_{t \to +\infty} y(t). \tag{6}$$

Note que $c \in [0, 2]$ pois

$$0 = y(0) \leq y(t) < 2 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Queremos provar que $c = 2$. Em primeiro lugar, notamos que o teorema de Picard-Lindelöf assegura que $y(t)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Por (6), $y = c$ é uma assimptota horizontal ao gráfico de $y(t)$ pelo que, por continuidade de f:

$$0 \;=\; \lim_{t \to +\infty} y'(t) \;=\; \lim_{t \to +\infty} f\big(y(t)\big) \;=\; f(c).$$

Mas então c é um ponto fixo da equação diferencial; pelo que vimos na alínea (a), $c = \pm 2$. Mas como $c \in [0, 2]$,

$$c = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 2.$$