DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022, 10/02/2022

Exame - versão A

Cursos: LENO, LEEC e LEMec

(2,0 val) 1. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' - \frac{2}{t}y = t \qquad , \qquad y(1) = 2$$

para $t > 0$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$xy^2 + e^x y - x \; + \; \left(e^x + x^2 y + y\right)\frac{dy}{dx} \; = \; 0, \qquad\qquad y(0) = 1$$

(0,5 val) (a) Verifique que a equação é exacta.

(1,5 val) (b) Determine uma função ϕ tal que $\phi(x,y) = C$, com $C \in \mathbb{R}$, define implicitamente a solução geral da equação.

(1,0 val) (c) Determine explicitamente a solução do problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de solução.

3. Considere a equação diferencial:

$$y''' \; + \; y'' \; = 12t. \tag{1}$$

(1,0 val) (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(2,0 val) (b) Determine a solução geral da equação (1).

4. Considere a matriz

$$A \; = \; \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1,5 val) (a) Determine e^{At}.

(1,0 val) (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' \; = \; 3x - y + 2e^{2t} \\ y' \; = \; x + y \end{cases}$$

com $x(0) = 0$ e $y(0) = -1$.

5. Considere o campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = (x,\ y,\ -2z+2)$$

e seja S o parabolóide $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$, com $z > 0$ munido com normal $\vec{\nu}$ com terceira componente positiva.

(1,0 val) (a) Calcule a área de S.

(1,0 val) (b) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através de S no sentido de $\vec{\nu}$.

(1,5 val) (c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $F(x,y,z)$ através da superfície S no sentido da normal $\vec{\nu}$ (note que a superfície não é fechada).

[2,0 val.] 6. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi \ \ , \ \ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = 0\,; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 6\,\mathrm{sen}(2x) - 15\,\mathrm{sen}(5x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[1,5 val.] 7. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

e indique a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[0,5 val.] (b) Use a alínea anterior para determinar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

8. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (4 - y^2)e^{\cos^2 y} \qquad , \qquad y(0) = 0 \tag{2}$$

[1,5 val.] (a) Mostre que o problema (2) tem uma única solução definida em $\mathbb{R}$.

[0,5 val.] (b) Sendo $y(t)$ a solução de (2), determine

$$\lim_{t \to +\infty} y(t)$$