# Equações Diferenciais Parciais
# Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2021/22

# Índice


**1 Introdução às Equações Diferenciais Parciais** **5**

1.1 Método de Separação de Variáveis . . . . . 6
1.2 Séries de Fourier . . . . . 9
1.2.1 Definição e convergência pontual . . . . . 9
1.2.2 O Núcleo de Dirichlet e as Somas Parciais das Séries de Fourier . . . . . 13
1.2.3 Série de Fourier de Senos . . . . . 16
1.2.4 Série de Fourier de Cosenos . . . . . 18
1.3 Problema de Dirichlet Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional . . . 19
1.3.1 Exemplo 1 . . . . . 19
1.3.2 Exemplo 2 . . . . . 20
1.4 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional . 21
1.5 Problema de Neumann Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional . . 22
1.6 Unicidade de Solução do Problema de Dirichlet para a Equação do Calor . . . . 24
1.7 A Equação das Ondas . . . . . 25
1.7.1 Problema da Corda Vibrante . . . . . 25
1.8 Equação de Laplace Bidimensional . . . . . 29
1.8.1 Problema de Dirichlet Semi-Homogéneo para a Equação de Laplace . . . 30
1.8.2 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação de Laplace . . . . 33
1.9 Complementos Sobre Séries de Fourier . . . . . 34
1.9.1 Forma Complexa das Séries de Fourier . . . . . 34
1.9.2 Limites das Sucessões de Coeficientes $a_n$ e $b_n$ . . . . . 36
1.9.3 Convergência num Ponto de Continuidade de $f$ . . . . . 38

# Capítulo 1

# Introdução às Equações Diferenciais Parciais

O objectivo de resolver uma equação diferencial parcial é determinar uma função $u(x_1, ..., x_n)$ que verifica uma relação de igualdade envolvendo as suas derivadas (que serão derivadas parciais).

Centraremos o nosso estudo nas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem em domínios (espaciais) rectangulares, em que as equações são afins aos três tipos seguintes:

- **Equação do Calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$$

  em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$, e $K > 0$ é a condutividade térmica do material. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo condução térmica e difusão[1].

- **Equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

  em que $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$. Este tipo de equações está associado a processos estacionários de condução térmica e difusão, à electrostática e ao movimento dos fluídos.

- **Equação das Ondas**

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$$

  em que $t > 0$, $x_1 \in [0, L_1]$,..., $x_n \in [0, L_n]$, e $c$ uma constante. Este tipo de equações está associado a processos envolvendo propagação de ondas.

Para resolver estas equações, necessitaremos de estabelecer

- **Condições de Fronteira**

  Que predefinem o comportamento da função $u$ na fronteira de $R = [0, L_1] \times ... \times [0, L_1]$, e que poderão ser de vários tipos:

  - ◇ *Condições de Dirichlet*
    se definem o valor de $u$ na fronteira de $R$;

[1] No caso de de tratar da equação de difusão, $\frac{\partial u}{\partial t} = D\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\Big)$, $D > 0$ é o coeficiente de difusão da susbtância.

◇ *Condições de Neumann*
se definem o valor de $\frac{\partial u}{\partial x}$ na fronteira de $R$ (ou seja, definem o fluxo de $u$ na fronteira de $R$);

Poderão ainda ser *mistas* se existirem condições dos dois tipos.

As condições de fronteira dizem-se *homogéneas* se forem nulas.

- **Condições Iniciais**

que definem o estado inicial, isto é, para a equação do calor

$$u(0, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \quad , \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in R$$

e para a equação das ondas

$$\begin{cases} u(0, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad , \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in R$$

## 1.1 Método de Separação de Variáveis

Para descrever o método de separação de variáveis, vamos aplicá-lo ao problema de Dirichlet homogéneo para a equação do calor.

A equação do calor unidimensional modela a propagação de calor (ou a difusão de uma substância) através de um corpo unidimensional (por exemplo uma barra) de comprimento $L$. A função $u(t, x)$ mede a temperatura da barra no ponto $x$ no instante $t$ e verifica a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \forall t > 0 \ , \ x \in ]0, L[$$

sendo $K > 0$ a condutividade térmica (ou o coeficiente de difusão). Assumiremos condições de fronteira de Dirichlet homógeneas, isto é

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$$

e a condição inicial

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in ]0, L[$$

em que $f$ é uma função seccionalmente contínua e com derivada seccionalmente contínua definida no intervalo $[0, L]$.

Resolveremos então o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in ]0, L[ \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in ]0, L[ \end{cases} \tag{1.1}$$

Começamos por notar que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (1.1) é $u(t, x) \equiv 0$. Se $f$ não é identicamente nula então $u$ tambem não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.1) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(T(t)X(x)\Big) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \;\Leftrightarrow\; T'(t)X(x) = KT(t)X''(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in ]0, L[$ uma função de $t$ ($\frac{T'(t)}{KT(t)}$) iguale uma função de $x$ ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $u(t,0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(t,L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

É conveniente notar que, se não exigíssemos condições de fronteira nulas, o método de separação de variáveis falharia neste ponto. A razão é muito simples — a lei do anulamento do produto não seria aplicável.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \;\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \;\; T' = \lambda KT$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se duma equação diferencial linear homogénea, cuja solução tem que verificar condições de fronteira nulas. Nesta situação, a função nula é sempre solução de **(P1)**. Existem no entanto alguns valores de $\lambda$ para os quais essa não é a única solução de **(P1)**.

**Definição:** $\lambda$ diz-se um *valor próprio* de **(P1)**, associado à função própria $\varphi(x)$, sse $\varphi(x)$ for uma solução **não nula** de **(P1)**.

Para continuar a nossa resolução, teremos que encontrar os valores própios de **(P1)** a fim de determinar as suas soluções não nulas. Assim

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A$, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D + \mathrm{i}\omega)(D - \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(L) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices $n$ inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer $\lambda$ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de $\lambda$ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \qquad \Rightarrow \qquad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as solução da equação do calor unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

**Princípio da Sobreposição**

Qualquer combinação linear de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas (incluindo de um número infinito, se houver convergência), verificando condições de fronteira homogéneas, é também solução da equação e verifica as mesmas condições de fronteira.

Observa-se que, relativamente a sobreposições com um número infinito de termos, será necessário verificar adicionalmente que a série obtida é uniformemente convergente em subconjuntos compactos do domínio onde a equação diferencial é satisfeita.

Então, atendendo a (1.2)

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Dirichlet nulas. Para determinar as constantes $c_n$ teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0,x) = f(x)$. Resulta então que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{1.3}$$

## 1.2 Séries de Fourier

### 1.2.1 Definição e convergência pontual

Para qualquer $L \in \mathbb{R}^+$ , considere-se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. Pode-se associar a $f$ a sua *Série de Fourier*, ou *série trigonométrica*

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

**Teorema:** (convergência pontual da série de Fourier)

Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]-L, L[$, então para cada $x \in [-L, L]$, a série de Fourier associada é uma série convergente, tendo-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ \dfrac{f(L^-) + f(-L^+)}{2} & \text{sendo} \quad x = -L \text{ ou } x = L \end{cases} \tag{1.4}$$

Se $f$ é contínua em $x = -L$ e em $x = L$ tem-se, simplesmente [2]:

$$SF_f(\pm L) = \frac{f(L) + f(-L)}{2}$$

Note-se que a série de Fourier $SF_f$ está bem definida em $\mathbb{R}$, é periódica de período $2L$ e está relacionada, no sentido descrito em (1.4)) com a extensão periódica, $\bar{f}$, de $f$ a $\mathbb{R}$, isto é:

$$SF_f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{\bar{f}(x^+) + \bar{f}(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } \bar{f} \end{cases}$$

**Exemplo:**
Determinar a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se} \quad x \in [-1, 0[ \\ \pi & \text{se} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

[2] Na maior parte das aplicações, $f$ é contínua em $x = \pm L$; nos casos em que a continuidade em $x = \pm L$ não se verifica, pode-se de qualquer modo alterar a definição da função $f$ de forma a que $f(L) = f(L^-)$ e $f(-L) = f(-L^+)$.

A série de Fourier associada a $f$ será

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big)$$

Atendendo a que a função $f$ é uma função ímpar, ter-se-á

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \qquad \text{e} \qquad a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1} \pi \operatorname{sen}(n\pi x)dx = \frac{2}{n}\Big(1-(-1)^n\Big)$$

Concluimos que

$$SF_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\Big(1-(-1)^n\Big)\operatorname{sen}(n\pi x)$$

Atendendo a que, para $n$ par, $1-(-1)^n = 0$, os termos de ordem par da série anterior são nulos:

$$SF_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2k-1}\ \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

Dado que tanto $f$ como $f'$ são funções seccionalmente contínuas em $[-1,1]$ o teorema anterior permite-nos concluir que $SF_f(x)$ está bem definida para $x \in [-1,1]$. Pela periodicidade das funções $\operatorname{sen}(n\pi x)$, é fácil de compreender que $SF_f$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que é periódica de período $2$. De seguida mostra-se alguna gráficos das aproximações da série de Fourier da função $f$, isto é, o gráfico de alguns termos da sucessão das somas parciais

$$S_N f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{2k-1}\ \operatorname{sen}\big((2k-1)\pi x\big)$$

(para alguns valores de $N \in \mathbb{N}$).

Gráfico da função $(S_1 f)(x) = 4\operatorname{sen}(\pi x)$

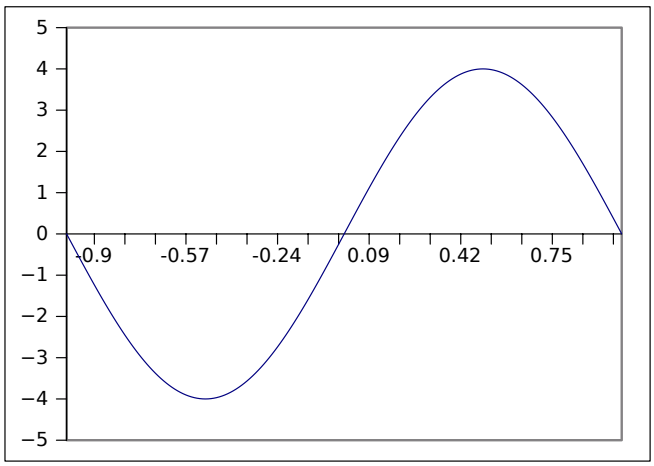


Figura 1.1: Aproximação $N = 1$

Gráfico da função $(S_2 f)(x) = 4\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}(3\pi x)$

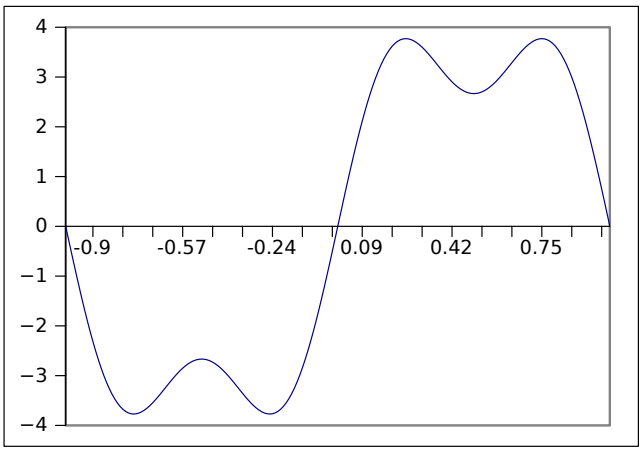


Figura 1.2: Aproximação $N = 2$

Gráfico da função $(S_3 f)(x) = 4\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(5\pi x)$

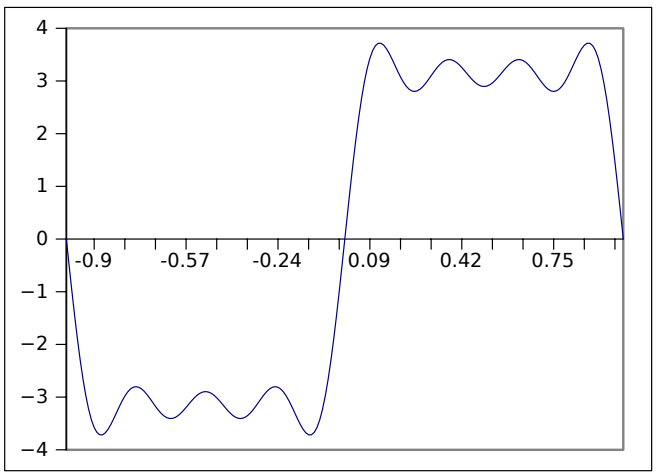


Figura 1.3: Aproximação $N = 3$

Gráfico da função $(S_5 f)(x) = 4\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(5\pi x) + \frac{4}{7}\,\mathrm{sen}(7\pi x) + \frac{4}{9}\,\mathrm{sen}(9\pi x)$

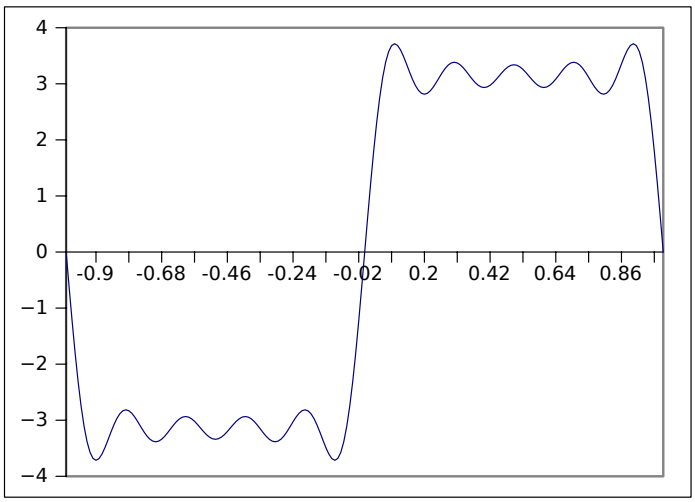


Figura 1.4: Aproximação $N = 5$

Gráfico da função $(S_{12} f)(x) = \sum_{n=1}^{12} \frac{4}{2n-1}\,\mathrm{sen}((2n-1)\pi x)$

Em $[-1, 1]$ a soma da série de Fourier da função $f$ será dada por:

$$SF_f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{se} \quad x \in ]-1, 0[ \\ \pi & \text{se} \quad x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{se} \quad x = \pm 1 \text{ ou } x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Por ser uma função periódica de período 2, em $\mathbb{R}$ a soma da série de Fourier da função $f$ será dada pela extensão periódica de período 2 da função definida em (1.5).

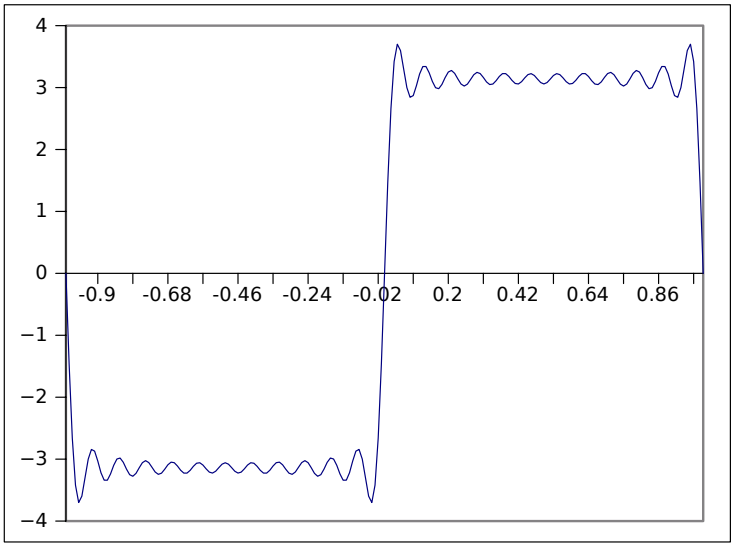


Figura 1.5: Aproximação $N = 12$

### 1.2.2 O Núcleo de Dirichlet e as Somas Parciais das Séries de Fourier

Vamos nesta secção tentar explicar a razão do comportamento oscilatório das somas parciais das séries de Fourier. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $L = \pi$; isto é, consideramos apenas séries de Fourier de funções $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. O caso mais geral — em que $L$ é um número real positivo arbitrário — pode facilmente ser convertido no caso $L = \pi$ pela mudança de variável $x' = \frac{\pi}{L}x$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos o **núcleo de Dirichlet**, $D_N(x)$, como sendo a função trigonométrica:

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(Nx) \tag{1.6}$$

Verifica-se facilmente que $D_N(x)$ é uma função par e que:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$$

Note também que:

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left(e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}Nx} + e^{-\mathrm{i}(N-1)x} + \cdots + e^{-\mathrm{i}x} + 1 + e^{\mathrm{i}x} + \cdots + e^{\mathrm{i}Nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-\mathrm{i}Nx}\left(1 + e^{\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}2x} + \cdots + e^{\mathrm{i}2Nx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,e^{-\mathrm{i}Nx}\sum_{k=0}^{2N}\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^k
\end{aligned}$$

Como o somatório acima obtido não é mais do que a soma dos primeiros $2N+1$ termos da série geométrica de razão $e^{\mathrm{i}x}$, então:

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2}\, e^{-\mathrm{i}Nx}\, \frac{1-(e^{\mathrm{i}x})^{2N+1}}{1-e^{\mathrm{i}x}} \\ &= \frac{e^{-\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}}{2e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\, \frac{1-e^{\mathrm{i}(2N+1)x}}{1-e^{\mathrm{i}x}} \\ &= \frac{e^{-\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}-e^{\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})x}}{2\mathrm{i}}\, \frac{1}{2}\, \frac{2\mathrm{i}}{e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}-e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}} \\ &= -\operatorname{sen}\left((N+\tfrac{1}{2})x\right)\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

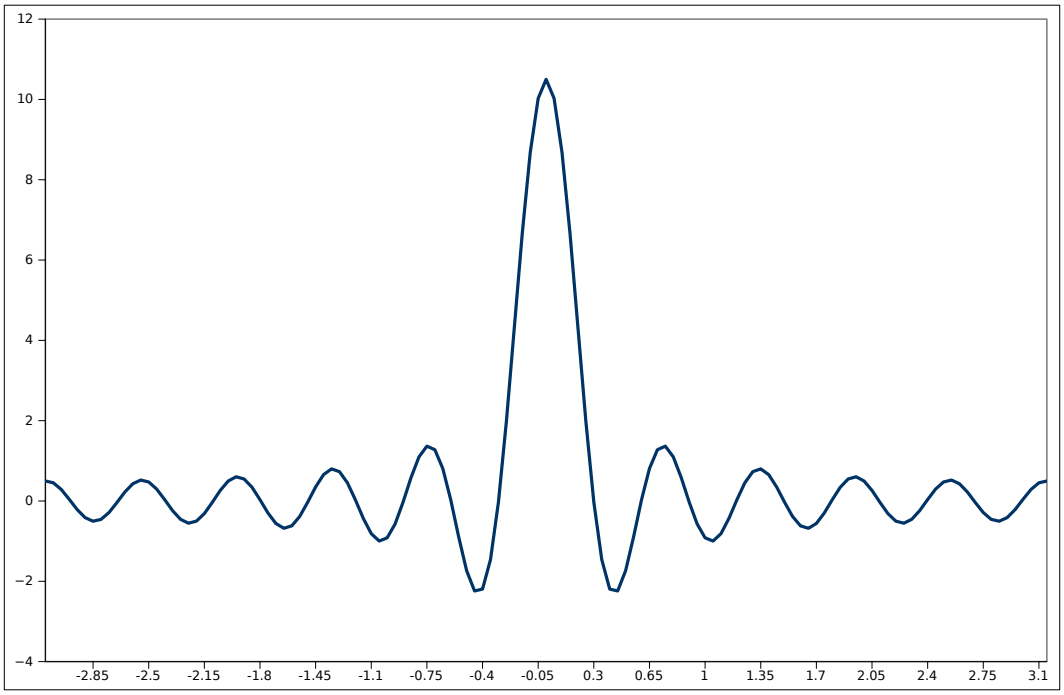


Figura 1.6: Gráfico de $D_{10}(x)$

Seja agora $f$ uma função real, seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$, e admitamos que $f$ foi periodicamente estendida a $\mathbb{R}$. [3].

[3]Ou seja, dada $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ pode-se definir $f(y)$ para qualquer $y\in\mathbb{R}$ tendo em conta que existem $k\in\mathbb{Z}$ e $x\in[-\pi,\pi]$ tais que $y=x+2k\pi$; assim sendo, considera-se que $f(y)=f(x+2k\pi)\overset{def}{=}f(x)$. O que desta forma se obtém é, como se sabe, a extensão periódica de $f$ a $\mathbb{R}$.

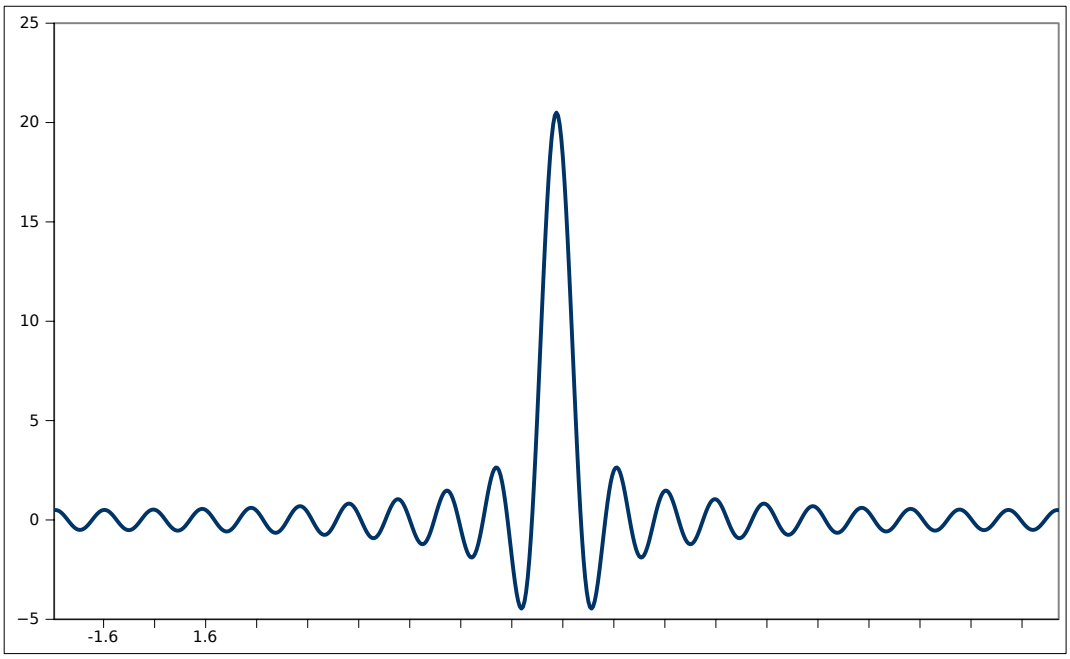


Figura 1.7: Gráfico de $D_{20}(x)$

A sucessão das somas parciais, $S_N(x)$, da série de Fourier de $f$ é dada por:

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} f(y)\, dy + \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\, dy\right) \cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen} ky\, dy\right) \operatorname{sen} kx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\cos ky\ \cos kx + \operatorname{sen} ky\ \operatorname{sen} kx\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos\left(k(y-x)\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(y-x)\, dy
\end{aligned}$$

Desta forma se deduziu uma fórmula integral para a sucessão das somas parciais da série de Fourier de $f$:

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(y-x)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) D_N(\theta)\, d\theta, \tag{1.7}$$

O último integral foi obtido através da substituição de variável $y - x = \theta$ [4].

[4] Como a função $f(x+\theta)D_N(\theta)$ é periódica de período $2\pi$, o integral entre $-\pi - x$ e $\pi - x$ é igual ao integral entre $-\pi$ e $\pi$.

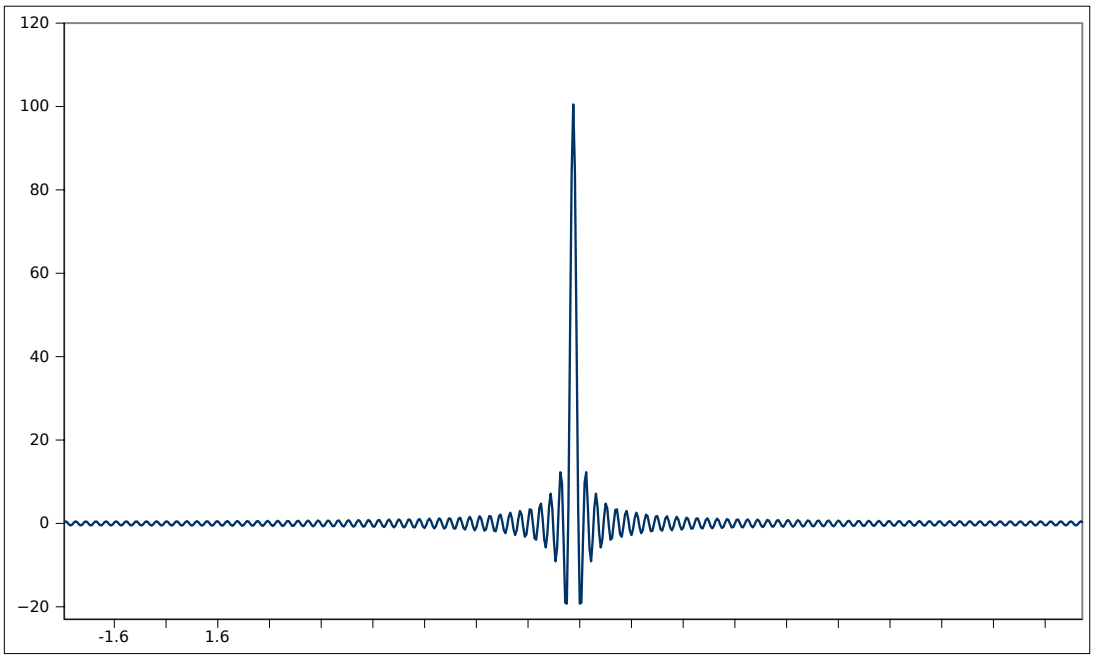


Figura 1.8: Gráfico de $D_{100}(x)$

A fórmula (1.7) diz-nos, grosso modo, que $S_N(x)$ é uma *"média ponderada"* de $f$ numa vizinhança de $x$, em que os *"pesos"* são dados pelo núcleo de Dirichlet, $D_N(x)$. Note que a *"soma dos pesos"* é $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = 1$ [5]. Nas figuras (3.6), (3.7) e (3.8) representa-se os gráficos de $D_N(x)$ para alguns valores de $N$. Pode-se observar o comportamento oscilatório do núcleo de Dirichlet: à medida que $N$ cresce, as oscilações de $D_N(x)$ aumentam em amplitude mas concentram-se junto de $x = 0$. Se $f$ for seccionalmente $C^1$ então é possível provar, a partir da fórmula (1.7), que $S_N(x)$ converge da forma descrita pelo teorema da convergência pontual (equação (1.4)).

Complementaremos o estudo da convergência das séries de Fourier numa secção posterior.

### 1.2.3 Série de Fourier de Senos

Sendo $L > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a $f$ a *série de senos*

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}(\frac{n\pi x}{L})$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão ímpar de $f$ ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função $g$ é ímpar, os coeficientes da série de Fourier

[5] Em rigor, o primeiro integral da equação (1.7) designa-se por convolução de $f$ com $D_N$.

verificam:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = 0 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **ímpar** de $f$ a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\mathrm{sen}}f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ 0 & \text{se } x = L \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:**

Determinar a série de Fourier de senos da função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{se} \quad x \in [1, 2][ \end{cases}$$

A série de senos da função $f$ em $[0, 2]$ será da forma

$$S_{\mathrm{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$$

em que

$$b_n = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

Conclui-se que

$$S_{\mathrm{sen}}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que em $[-2, 2]$

$$S_{\mathrm{sen}}f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in ]0, 2] \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -f(-x) & \text{se} \quad x \in [-2, 0[ \end{cases} \tag{1.8}$$

e em $\mathbb{R}$ a soma da série de senos da função $f$ será a extensão periódica de período 4, de (1.8) a $\mathbb{R}$.

### 1.2.4 Série de Fourier de Cosenos

Sendo $L > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de derivada seccionalmente contínua em $]0, L[$, pode-se associar a $f$ a *série de Cosenos*

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

Esta série é obtida, efectuando a extensão par de $f$ ao intervalo $[-L, L]$, e calculando a sua série de Fourier. Observe-se que se uma dada função $g$ é par os coeficientes da série de Fourier verificam:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L g(x)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier e atendendo que se está a utilizar a extensão **par** de $f$ a $[-L, L]$, conclui-se que para $x \in [0, L]$

$$S_{\cos} f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{sendo} \quad x \text{ um ponto de descontinuidade de } f \\ f(L) & \text{se } x = L \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** Determinar a série de Fourier senos da função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}[ \\ 1 & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

A série de cosenos da função $g$ em $[0, \pi]$ será da forma

$$S_{\cos} g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx = \frac{3}{2}$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$$

Conclui-se que

$$S_{\cos}g(x) = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\cos(nx)$$

Pelo Teorema da convergência das séries de Fourier, tem-se que em $[-\pi,\pi]$

$$S_{\cos}g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in ]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[ \\ 1 & \text{se} \quad x \in [-\pi,-\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\pi] \\ 1/2 & \text{se} \quad x = \pm\frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{1.9}$$

e em $\mathbb{R}$ a soma da série de cosenos da função $g$ será a extensão periódica de período $2\pi$, de (1.9) a $\mathbb{R}$.

## 1.3 Problema de Dirichlet Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in]0,\pi[ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t>0 \\ u(0,x) = f(x) & x\in]0,\pi[ \end{cases} \tag{1.10}$$

em que $f$ é uma função seccionalmente contínua em $]0,\pi[$. Tal como deduzimos na Secção 1.1, a solução do problema (1.10) é dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2Kt}\operatorname{sen}(nx) \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

e para determinar as constantes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usaremos a condição inicial, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = f(x) \tag{1.11}$$

### 1.3.1 Exemplo 1

Se a condição inicial for

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

por (1.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$$

e é então fácil de deduzir que

$$c_2 = 1 \quad , \quad c_5 = -3 \quad \text{e} \quad c_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\}$$

Concluimos que a solução de (1.10) quando $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)$ é dada por

$$u(t, x) = e^{-4Kt} \operatorname{sen}(2x) - 3e^{-25Kt} \operatorname{sen}(5x)$$

### 1.3.2 Exemplo 2

Se a condição inicial for

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

por (1.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - x \right|$$

pelo que para determinar as constantes $(c_n)$ precisamos de determinar a série de senos da função $f(x)$ em $[0, \pi]$. Assim

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \Big[ \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(nx)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \Big] = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Dado que a extensão periódica (de período $2\pi$) a $\mathbb{R}$ da extensão ímpar de $f$ ao intervalo $[-\pi, \pi]$ é contínua, tem-se que para todo $x \in [0, \pi]$

$$\frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}(nx)$$

pelo que se conclui que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$c_n = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

e a solução de (1.10) quando $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$ é dada por

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} e^{-n^2 Kt} \operatorname{sen}(nx)$$

## 1.4 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in ]0,L[ \\ u(t,0)=T_1\ \ ,\ \ u(t,L)=T_2 & t>0 \\ u(0,x)=f(x) & x\in ]0,L[ \end{cases} \tag{1.12}$$

em que $T_1$. $T_2$ são constantes. No contexto da equação do calor unidimensional, estas condições de fronteira significam que as extremidades da barra, $0$ e $L$, são mantidas a temperatura constante, $T_1$ e $T_2$ respectivamente, durante todo o processo. Sendo estas constantes diferentes de zero, não podemos aplicar directamente o método de separação de variáveis. Temos então que considerar

$$u(t,x)=u_e(x)+v(t,x) \tag{1.13}$$

em que $u_e(x)$ é solução do problema de valores na fronteira

$$u_e''=0 \qquad , \qquad u_e(0)=T_1 \ \text{ e } \ u_e(L)=T_2$$

e $v(t,x)$ é solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in ]0,L[ \\ v(t,0)=0\ \ ,\ \ v(t,L)=0 & t>0 \\ v(0,x)=f(x)-u_e(x) & x\in ]0,L[ \end{cases} \tag{1.14}$$

Vamos verificar em primeiro lugar que se $u(t,x)$ é da forma dada em (1.13) então é solução de (1.12). De facto, utilizando a linearidade da derivada

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=K\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2}+K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=Ku_e''+K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0+\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u_e}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

pelo que verifica a equação diferencial de (1.12). Por outro lado

$$u(t,0)=u_e(0)+v(t,0)=T_1+0=T_1 \ \text{ e } \ u(t,L)=u_e(L)+v(t,L)=T_2+0=T_2$$

pelo que verifica as condições de fronteira de (1.12). Finalmente

$$u(0,x)=u_e(x)+v(0,x)=u_e(x)+f(x)-u_e(x)=f(x)$$

pelo que verifica a condição inicial de (1.12). Conclui-se que $u(t,x)$ dada em (1.13) é solução de (1.12). A função $u_e(x)$ é denominada uma solução estacionária de (1.12), pois não depende de $t$.

A equação $u_e''=0$ tem como solução $u_e(x)=Ax+B$. Dado que $u_e(0)=T_1$ e $u_e(L)=T_2$ conclui-se que

$$u_e(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1$$

Por outro pela Secção 1, dado que (1.14) é o problema da equação do calor com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

em que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(c_n)$ são os coeficientes da série de senos da função $f(x) - \frac{T_2-T_1}{L}x - T_1$ em $[0, L]$, isto é

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - \frac{T_2-T_1}{L}x - T_1\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \tag{1.15}$$

Concluimos que a solução de (1.12) é dada por

$$u(t,x) = \frac{T_2-T_1}{L}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K}{L^2}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

com $(c_n)$ dados por (1.15).

## 1.5 Problema de Neumann Homogéneo para a Equação do Calor Unidimensional

Resolveremos o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ x \in ]0, L[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in ]0, L[ \end{cases} \tag{1.16}$$

isto é, vamos estudar a propagção de calor numa barra de comprimento $L$ em que não há troca de calor com o exterior pelas suas extremidades (o significado das condições de Neumenn $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0$ é que o fluxo de calor através da fronteira do corpo, que neste caso são os pontos $x = 0$ e $x = L$, é nulo).

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ então a solução de (1.16) é $u(t,x) \equiv 0$. Se $f$ não é identicamente nula então $u$ tambem não o será.

Vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.16) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial, tal como nos casos anteriores

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(T(t)X(x)\Big) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t > 0$ e $x \in ]0, L[$ uma função de $t$ $(\frac{T'(t)}{KT(t)})$ iguale uma função de $x$ $(\frac{X''(x)}{X(x)})$. Para que tal se verifique é necessário que ambos igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira

- $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0$ implica $T(t)X'(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X'(0) = 0$.
- $\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0$ implica $T(t)X'(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X'(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X'(L) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver — correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \;\; T' = \lambda K T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**. Trata-se de um problema de valores próprios e para os determinar teremos que encontra as soluções não nulas de **(P1)**. Assim

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A$, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\omega^2)$ — A equação é $(D + \mathrm{i}\omega)(D - \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

O caso $\lambda > 0$ combinado com as condições de fronteira, produz apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio de **(P1)**.
Para o caso $\lambda = 0$ obtém-se $X(x) = Ax + B$ que combinado com as condições de fronteira, produz $X(x) = B$. Pelo que $\lambda = 0$ é valor próprio de **(P1)** associado à funçã própria $X_0(x) = 1$
Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X'(0) = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; A = 0 \\ X'(L) = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; B\omega\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}$$

Temos assim que $\lambda = 0$, com $X(x) = 1$ e $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{N}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de $\lambda$ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para $\lambda = 0$

$$T' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0(t) = 1$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T' = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}KT \qquad \Rightarrow \qquad T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as solução da equação do calor unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = c_0 \quad \text{e} \quad u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Então

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t,x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2K}{L^2}t}\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad , \quad c_n \in \mathbb{R}$$

é solução da equação do calor unidimensional que verifica condições de fronteira de Neumann nulas. Para determinar as constantes $c_n$ teremos que utilizar a condição de fronteira $u(0,x) = f(x)$. Resulta então que:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{1.17}$$

Concluindo-se que as constantes $c_n$ são os coeficientes da série de cosenos de $f$ em $[0,L]$, ou seja

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

## 1.6 Unicidade de Solução do Problema de Dirichlet para a Equação do Calor

Admitamos agora que $u(t,x)$ e $\hat{u}(t,x)$ são duas funções de classe $C^1$ na variável $t$ e de classe $C^2$ na variável $x$ [6] que satisfazem o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ x \in ]0,L[ \\ u(t,0) = T_1\ ,\ u(t,L) = T_2 & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in ]0,L[ \end{cases}$$

Então $v(t,x) = u(t,x) - \hat{u}(t,x)$ satisfaz o problema homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ x \in ]0,L[ \\ v(t,0) = v(t,L) = 0 & t > 0 \\ v(0,x) = 0 & x \in ]0,L[ \end{cases} \tag{1.18}$$

[6] Dizemos, por exemplo, que $u(t,x)$ é de classe $C^1$ na variável $t$ se para qualquer $x_0 \in [0,L]$, a função $\varphi(t) = u(t,x_0)$ é de classe $C^1$.

Multiplicando a equação do calor (1.18) por $v$ e integrando em $x$ no intervalo $[0, L]$, obtém-se:

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = K\int_0^L v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

Integrando o segundo membro por partes, e usando as condições iniciais [7] em (1.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_0^L v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx &= K\left(v(t,0)\,\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,0) - v(t,L)\,\tfrac{\partial v}{\partial x}(t,L) - \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\right)\\ &= -K\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \le 0\end{aligned}$$

Quanto ao primeiro membro:

$$\int_0^L v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L 2v\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\Big(v(t,x)\Big)^2 dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \Big(v(t,x)\Big)^2 dx$$

Definido $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \big(v(t,x)\big)^2\,dx$, então conclui-se dos resultados anteriores que $\dfrac{dE}{dt} \le 0$. Por outro lado, pela condição inicial $E(0) = 0$; além disso, $E(t) \ge 0$, para qualquer $t \ge 0$. Assim sendo, teremos necessariamente que $E(t) \equiv 0$, donde se conclui que:

$$v(t,x) \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t,x) \equiv \hat{u}(t,x).$$

## 1.7 A Equação das Ondas

Um outro exemplo de equação diferencial parcial de extrema relevância física é a equação das ondas (linear). No mundo da física, os fenómenos ondulatórios são comuns: os exemplos óbvios são as perturbações na superfície de um fluído, as vibrações de cordas em instrumentos musicais, a as perturbações de pressão no ar que consistem na propagação de som, e a radiação electromagnética. Se a amplitude das perturbações for suficientemente pequena e regular, a variável de perturbação $u(x,t)$ associada às ondas verifica a equação das ondas (linear)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\Delta u$$

onde $u(t,x)$ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda e $c$ é a velocidade de propagação da onda no meio em questão.

### 1.7.1 Problema da Corda Vibrante

A equação das ondas unidimensional pode ser usada como modelo matemático de uma corda vibrante.

Considere-se o problema de ondas (não forçadas) numa corda de comprimento finito $L$, com posição e velocidade inicial dadas e extremidades fixas.

[7] Este mesmo argumento pode ser usado para provar unicidade de solução para o problema de Neumann; no caso de condições de fronteira de Neumann, teremos $\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,L) = 0$ em vez de $v(t,0) = v(t,L) = 0$.

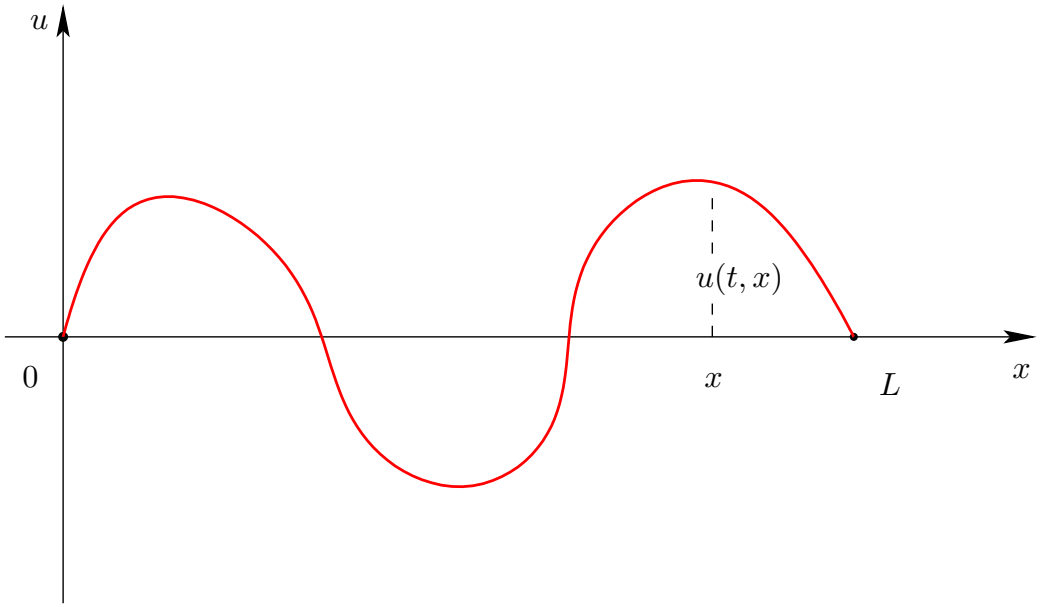


Figura 1.9: Problema da corda vibrante

Pretende-se então encontrar o deslocamento $u(t,x)$ verificando o problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0\ ,\ x\in ]0,L[ \\ u(t,0)=u(t,L)=0 & t>0 \\ u(0,x)=f(x) & x\in ]0,L[ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x) & x\in ]0,L[ \end{cases} \tag{1.19}$$

Começamos por notar que se $f(x)\equiv 0$ e $g(x)\equiv 0$ então a solução de (1.19) é $u(t,x)\equiv 0$. Se $f$ ou $g$ não são identicamente nulas então $u$ tambem não o será.

Tal como para a resolução da equação do calor unidimensional, e dado que estamos a considerar condições de fronteira homogéneas, vamos utilizar o método de separação de variáveis para determinar soluções do problema (1.19) da forma

$$u(t,x)=T(t)X(x)$$

Pela observação acima feita, nem $T(t)$ nem $X(x)$ poderão ser identicamente nulas. Substituindo na equação diferencial obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(T(t)X(x)\Big)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(T(t)X(x)\Big) \Leftrightarrow T''(t)X(x)=c^2T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Observe-se que, separadas as variáveis, pretende-se que **para todos** $t>0$ e $x\in ]0,L[$ uma função de $t$ ($\frac{T''(t)}{c^2T(t)}$) iguale uma função de $x$ ($\frac{X''(x)}{X(x)}$). Para que tal se verifique é necessário que ambos

igualem uma constante, isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira e possíveis condições iniciais nulas (note que pelo que já foi referido apenas uma delas o poderá ser)

- $u(t,0) = 0$ implica $T(t)X(0) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(t,L) = 0$ implica $T(t)X(L) = 0$ e como tal ou $T(t)$ é a função identicamente nula ou $X(L) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(L) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver - correspondentes a duas equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{P1}) \ \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \ T'' = \lambda c^2 T$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2 X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A$, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - \mathrm{i}\omega)(D + \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as condições de fronteira, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(L) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{L} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices $n$ inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer $\lambda$ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de $\lambda$ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T'' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2T = 0 \quad \Rightarrow \quad (D^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}c^2)T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = \alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que as soluções da equação das ondas unidimensional, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, que verificam condições de fronteira de Dirichlet nulas são as funções da forma

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big(\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}\Big) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.20}$$

Por sobreposição, a solução da equação diferencial que satisfaz as condições de fronteira será:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big(\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + \beta_n \cos\frac{n\pi ct}{L}\Big).$$

Utilizando a condição inicial $u(0,x) = f(x)$, resulta que:

$$\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Utilizando a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$, resulta que

$$\frac{n\pi c}{L}\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

ou seja:

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Procuremos agora as denominadas *soluções de d'Alembert* para a equação das ondas. Atendendo às igualdades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big) \quad , \quad \operatorname{sen}(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\Big)$$

podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x-ct) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2}\Big(\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)$$

Pela definição dos coeficientes das séries de Fourier de senos $(\alpha_n)$ e $(\beta_n)$ se, em $[0,L]$, $f$ e $g$ forem funções contínuas com derivadas seccionalmente contínuas, teremos

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \bar{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\alpha_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

onde $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as extensões periódicas das extensões ímpares de $f$ e $g$ a $[-L, L]$. Resulta então que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} = \frac{1}{2}\Big(\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)\Big).$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\alpha_n}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi s}{L} \Big) ds \\
&= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds.
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução do problema pode ser escrita na forma

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\bar{f}(x-ct) + \bar{f}(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds$$

Para ilustrar, vamos considerar o exemplo em que $L = 1$, $c = 1$, a posição inicial, $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ e a velocidade inicial $g(x) = 0$. Temos assim que a solução do problema de vaores na fronteira e inicial

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0 \ , \ x \in ]0,1[ \\
u(t,0) = u(t,1) = 0 & t > 0 \\
u(0,x) = \operatorname{sen}(\pi x) & x \in ]0,1[ \\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & x \in ]0,1[
\end{cases} \tag{1.21}$$

é

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big( \operatorname{sen} \pi(x-t) + \operatorname{sen} \pi(x+t) \Big)$$

## 1.8 Equação de Laplace Bidimensional

A equação de Laplace bidimensional é a equação diferencial parcial de segunda ordem, linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

assim chamada em homenagem ao influente matemático francês do século XVIII, Pierre-Simon Laplace. Esta equação, assim como as suas versões em dimensões superiores, é sem dúvida uma das mais importantes equações diferenciais da física e da matemática. Como vimos, as soluções reais desta equação são denominadas *funções harmónicas*.

A versão não homogénea da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

é conhecida como a *equação de Poisson*, em homenagem Siméon-Denis Poisson, que foi aluno de Laplace.

Para além da sua importância teórica, as equações de Laplace e Poisson surgem como as soluções estacionárias numa grande variedade de modelos físicos. Por exemplo, $u(x, y)$ pode ser interpretada como o deslocamento de uma membrana e $f(x, y)$ representa uma força externa que actua sobre a superfície da membrana. Outro exemplo é o equilíbrio térmico de placas: neste caso, $u(x, y)$ representa a temperatura e $f(x, y)$ uma fonte de calor externa. Na mecânica de fluidos, $u(x, y)$ representa a função potencial cujo gradiente $v = \nabla u$ é o vector velocidade do um de um fluido cujo fluxo é invariante por translações segundo uma certa direcção. Esta mesma *teoria do potencial* é aplicável à electrostática bidimensional e aos potenciais gravitacionais.

Uma vez que a equação de Laplace — e, também, a de Poisson — descrevem situações estacionárias, elas surgem associadas a problemas de valor na fronteira. Note-se que as equações do calor e das ondas — que descrevem sistemas físicos que evoluem com o tempo — estão associadas a problemas de valor na fronteira e de valor inicial.

Procuramos uma solução, $u(x, y)$, para a equação de Laplace — definida para $(x, y)$ numa região aberta e limitada, $D \subset \mathbb{R}^2$ — que satisfaz certas condições quando $(x, y)$ pertence à fronteira do conjunto $D$. Observamos que no caso bidimensional a fronteira de $D$ é constituída por uma ou mais curvas simples e fechadas. Como já referido, os tipos mais importantes de condições de fronteira são

- **Condições de Dirichlet**: que especificam o valor de $u(x, y)$ na fronteira do domínio

  $$u(x.y) = h(x, y) \quad , \quad \text{para } (x, y) \in \partial D$$

  para certa função $h$ conhecida.

- **Condições de Neumann**: na qual é especificada a derivada de $u$ segundo a normal na fronteira do domínio

  $$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = k(x, y) \quad , \quad \text{para } (x, y) \in \partial D$$

  para certa função $j$ conhecida, e $\mathbf{n}$ representa a normal unitária exterior à fronteira de $D$.

### 1.8.1 Problema de Dirichlet Semi-Homogéneo para a Equação de Laplace

Vamos resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0, a\ ,\ y \in ]0, b[ \\ u(x, 0) = f(x)\ ,\ \ u(x, b) = 0 & x \in ]0, a[ \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & y \in ]0, b[ \end{cases} \tag{1.22}$$

Observa-se que se $f(x) \equiv 0$ a solução de (1.22) é $u(x, y) \equiv 0$. Por outro lado, pode-se provar que se $f$ não for identicamente nula então $u$ também não o será. Tal como nos exemplos anteriores,

e tendo em conta que este problema tem 3 condições de fronteira homogéneas e um domínio rectangular, o método de separação de variáveis consiste na determinação de soluções **não nulas** do problema (1.22) da forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{1.23}$$

Note que nem $X(x)$ nem $Y(y)$ poderão ser identicamente nulas, pois caso contrário u(x,y) também o será. Substituindo (1.23) na equação diferencial obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(X(x)Y(y)\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(X(x)Y(y)\Big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \end{aligned}$$

Observe-se que as variáveis aparecem separadas: pretende-se que **para todos** os $x \in ]0,a[$ e $y \in ]0,b[$, $\frac{X''(x)}{X(x)}$, que é função apenas de $x$, iguale $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}$, que é função apenas de $y$. Para que tal se verifique é necessário que ambos os membros sejam iguais a uma constante; isto é, para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Por outro lado, atendendo às condições de fronteira nulas

- $u(0,y) = 0$ implica $X(0)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(0) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $X(0) = 0$.
- $u(a,y) = 0$ implica $X(a)Y(y) = 0$ e como tal ou $Y(y)$ é a função identicamente nula ou $X(a) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer, tem-se que $X(a) = 0$.
- $u(x,b) = 0$ implica $X(x)Y(b) = 0$ e como tal ou $X(x)$ é a função identicamente nula ou $Y(b) = 0$. Dado que a primeira hipótese não pode ocorrer (implicaria $u \equiv 0$) tem-se que $Y(b) = 0$.

Temos então dois problemas para resolver, envolvendo cada um deles uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}, \quad (\mathbf{P2}) \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

Começamos por resolver o problema **(P1)**, que é um problema de valores próprios. Assim:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

Teremos então três casos possíveis:

$\lambda = 0$ — A equação é $D^2X = 0$ o que implica $X(x) = Ax + B$, $A$, $B \in \mathbb{R}$;

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) — A equação é $(D-\mu)(D+\mu)X = 0$ o que implica $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$;

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$) — A equação é $(D - \mathrm{i}\omega)(D + \mathrm{i}\omega)X = 0$ o que implica $X(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$;

Como vimos no estudo da equação do calor, os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, combinados com as duas condições de fronteira nulas, produzem apenas a solução nula. Conclui-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio de **(P1)**. Para o caso $\lambda < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ X(a) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(\omega x) = 0 \end{aligned}$$

pelo que,

$$A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X(x) \equiv 0$$

ou

$$\mathrm{sen}(\omega a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{n\pi}{a} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}$$

Temos assim que $\lambda = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ e $X(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}$, para $n \in \mathbb{Z}$, são os valores próprios e as correspondentes funções próprias associadas. Note que para os índices $n$ inteiros negativos repetem-se os valores próprios e as funções próprias (a menos de combinação linear). Conclui-se que qualquer $\lambda$ que não seja da forma $-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) não é valor próprio de **(P1)**, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ é valor próprio de **(P1)** associado à função própria $X_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}$.

Para resolver o problema **(P2)**, utilizaremos apenas os valores próprios de **(P1)**, dado que para outros valores de $\lambda$ a única solução de **(P1)** é a nula. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}},$$

onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. As soluções que satisfazem a condição $Y(b) = 0$ são as soluções de

$$a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0\,,$$

ou seja,

$$b_n = -a_n e^{\frac{2n\pi b}{a}}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, as soluções de **(P2)** são:

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= a_n\left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{2n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \\ &= a_n e^{\frac{n\pi b}{a}}\left(e^{\frac{-n\pi b}{a}}e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) \\ &= 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}}\left(\tfrac{1}{2}e^{\frac{n\pi(y-b)}{a}} - \tfrac{1}{2}e^{-\frac{n\pi(y-b)}{a}}\right) \\ &= \alpha_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi(y-b)}{a}\,, \qquad \text{onde } \alpha_n = 2a_n e^{\frac{n\pi b}{a}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Resolvidos **(P1)** e **(P2)**, podemos concluir que um conjunto de soluções linearmente independentes da equação de Laplace bidimensional, da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, que verificam as condições de fronteira homogéneas, é constituído pelas funções:

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\;\mathrm{sh}\,\frac{n\pi(y-b)}{a} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.24}$$

Podemos agora procurar uma solução da equação diferencial que satisfaça todas as condições de fronteira recorrendo ao princípio da sobreposição:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{a}\;\mathrm{sh}\,\frac{n\pi(y-b)}{a}$$

Da condição de fronteira não nula, $u(x,0) = f(x)$, resulta que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes $\alpha_n$ são obtidos à custa dos coeficientes da série de senos de $f$ em $[0,a]$ por

$$-\alpha_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

ou

$$\alpha_n = -\frac{2}{a \operatorname{sh}(n\pi b/a)}\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

### 1.8.2 Problema de Dirichlet não Homogéneo para a Equação de Laplace

Consideremos agora o problema de valores na fronteira relativo à equação de Laplace com condições de Dirichlet não homogéneas. Pretende-se determinar uma solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0,a\ ,\ y \in ]0,b[ \\ u(x,0) = f_1(x)\ \ ,\ \ u(x,b) = f_2(x) & x \in ]0,a[ \\ u(0,y) = f_3(y)\ \ ,\ \ u(a,y) = f_4(y) & y \in ]0,b[ \end{cases} \tag{1.25}$$

Pelo princípio da sobreposição, a solução de (1.25) pode ser escrita na forma

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_1(x,y)$$

em que $u_1$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0,a\ ,\ y \in ]0,b[ \\ u(x,0) = f_1(x)\ \ ,\ \ u(x,b) = 0 & x \in ]0,a[ \\ u(0,y) = 0\ \ ,\ \ u(a,y) = 0 & y \in ]0,b[ \end{cases}$$

$u_2$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0,a\ ,\ y \in ]0,b[ \\ u(x,0) = 0\ \ ,\ \ u(x,b) = f_2(x) & x \in ]0,a[ \\ u(0,y) = 0\ \ ,\ \ u(a,y) = 0 & y \in ]0,b[ \end{cases}$$

$u_3$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0,a\ ,\ y \in ]0,b[ \\ u(x,0) = 0\ \ ,\ \ u(x,b) = 0 & x \in ]0,a[ \\ u(0,y) = f_3(y)\ \ ,\ \ u(a,y) = 0 & y \in ]0,b[ \end{cases}$$

e $u_4$ é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in ]0,a\ ,\ y \in ]0,b[ \\ u(x,0) = 0\ \ ,\ \ u(x,b) = 0 & x \in ]0,a[ \\ u(0,y) = 0\ \ ,\ \ u(a,y) = f_4(y) & y \in ]0,b[ \end{cases}$$

A solução de cada um destes problemas é obtida pelo método utilizado na resolução de (1.22).

## 1.9 Complementos Sobre Séries de Fourier

### 1.9.1 Forma Complexa das Séries de Fourier

Estudemos agora a forma complexa das séries de Fourier. Esta forma simplifica alguns dos cálculos, pois substitui as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ pelas exponenciais complexas $e^{\pm ix}$.

Seja $SC^1(I)$, $I = [-L, L]$, o espaço vectorial das funções $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) seccionalmente $C^1$. Consideramos o **produto interno** definido por:

$$\langle f, g \rangle \ = \ \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Verifica-se facilmente que o produto interno tem as propriedades que se espera, ou seja, para quaisquer funções $f, g$ seccionalmente $C^1$ em $I$:

**(1)** $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

**(2)** $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha \langle f, g\rangle$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

**(3)** $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$

**(4)** $\langle f, f\rangle \geq 0$ e $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (excepto num nº finito de pontos)

A partir do produto interno, define-se como é usual uma **norma** por:

$$\|f\|_{L^2} \ = \ \left(\langle f, f\rangle\right)^{1/2} \ = \ \left(\int_{-L}^{L} f(x)\overline{f(x)}dx\right)^{1/2} \ = \ \left(\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Considere-se o conjunto de funções

$$\mathcal{B} \ = \ \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2L}}\, e^{\frac{in\pi x}{L}}}_{\varphi_n(x)} \ : \ n \in \mathbb{Z} \Big\}$$

Para $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi x}{L}} e^{\frac{-im\pi x}{L}} dx = \int_{-L}^{L} e^{\frac{i(n-m)\pi x}{L}} dx \\ &= \begin{cases} \int_{-L}^{L} dx = 2L & \text{se} \quad n = m \\ \frac{L}{i(n-m)\pi} e^{\frac{i(n-m)\pi x}{L}} \Big|_{-L}^{L} = 0 & \text{se} \quad n \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

Note que a exponencial complexa é uma função periódica de período $2\pi i$, pelo que:

$$e^{-i(n-m)\pi} = e^{-i(n-m)\pi + 2\overbrace{(n-m)}^{\in \mathbb{Z}}\pi i} = e^{i(n-m)\pi}.$$

Logo $\mathcal{B}$ é um **conjunto ortonormal** de funções em $SC^1(I)$. Veremos posteriormente que o teorema da convergência pontual garante que qualquer $f$ seccionalmente $C^1$ em $I$ admite uma representação da forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (\text{excepto para } x \text{ num subconjunto finito de } I) \tag{1.26}$$

Dizemos que $\mathcal{B}$ é um conjunto **ortonormal de base** para $SC^1(I)$. Procuremos uma fórmula para os $c_n$. Admitindo por ora que a representação (1.26) é válida, e fazendo o produto interno por $\varphi_k$ (cálculo formal):

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \Big\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n \ , \ \varphi_k \Big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{\substack{= 0 \text{ se } n \neq k \\ = 2L \text{ se } n = k}} = 2Lc_k \tag{1.27}$$

A **forma complexa** de uma série de Fourier é, então:

$$SF\, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \tag{1.28}$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2L} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.29}$$

Tendo em conta que $f(x) \in \mathbb{R}$, podemos relacionar a forma complexa com a forma real da série de Fourier. Para tal, basta utilizar a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} SF\, f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{in\pi x}{L}} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( c_n \left( \cos \tfrac{n\pi x}{L} + i \operatorname{sen} \tfrac{n\pi x}{L} \right) + c_{-n} \left( \cos \tfrac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \tfrac{n\pi x}{L} \right) \Big) \\ &= \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \underbrace{(c_n + c_{-n})}_{a_n} \cos \tfrac{n\pi x}{L} + \underbrace{i(c_n - c_{-n})}_{b_n} \operatorname{sen} \tfrac{n\pi x}{L} \Big) \end{aligned}$$

tendo em conta que

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\,, \\ c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\underbrace{\left(e^{-\frac{in\pi x}{L}} + e^{\frac{in\pi x}{L}}\right)}_{\shortparallel\ 2\cos\frac{n\pi}{L}}dx = a_n\,, \\ i(c_n - c_{-n}) &= \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\underbrace{\left(e^{-\frac{in\pi x}{L}} - e^{\frac{in\pi x}{L}}\right)}_{\shortparallel\ 2i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}}dx = b_n\,. \end{aligned}$$

Como se vê, a forma trigonométrica da série de Fourier,

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\right),$$

que consiste numa sobreposição das funções do conjunto

$$\mathcal{B}^* = \left\{\cos\frac{n\pi x}{L} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{1\right\},$$

está relacionada com a forma complexa (1.28), que é uma sobreposição das funções do conjunto $\mathcal{B}$, por uma mudança de base. Pelo teorema da convergência pontual, a equação (1.26) é, pois, válida. Desta forma, $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal de base para $SC^1(I)$.

Pode ainda verificar que $\mathcal{B}^*$ é também um conjunto ortonormal para $SC^1(I)$ (exercício).

### 1.9.2 Limites das Sucessões de Coeficientes $a_n$ e $b_n$

Tal como na subsecção 1.6, podemos assumir que $L=\pi$, isto é, basta estudar as séries de Fourier de funções $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ [8]. Vamos admitir que $f$ é seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$. Isto garante-nos que os integrais que definem os coeficientes da série de Fourier, bem como o integral de $f^2$, estão bem definidos.

Consideremos a sucessão das somas parciais da série de Fourier de $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ na forma complexa:

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Resulta da definição dos coeficientes $c_n$, equação (1.29), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{S_N(x)}\,dx = \sum_{n=-N}^{N}\overline{c}_n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = 2\pi\sum_{n=-N}^{N}\overline{c}_n c_n = 2\pi\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2.$$

[8] O caso mais geral obtém-se a partir deste, através da mudança de variável $x' = \frac{\pi}{L}x$.

Identicamente, e tendo em conta que $f(x) \in \mathbb{R}$ implica que $\overline{f(x)} = f(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} S_N(x)\, dx \;=\; \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx \;=\; 2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c}_n \;=\; 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Por fim, usando as relações de ortogonalidade em $\mathcal{B}$, equações (1.27),

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \overline{S_N(x)}\, dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\left\| f - S_N \right\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - S_N(x) \right) \overline{\left( f(x) - S_N(x) \right)}\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \right)^2 dx \;-\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{S_N(x)}\, dx \;-\; \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} S_N(x)\, dx \;+\; \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \overline{S_N(x)}\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \right)^2 dx \;-\; 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.
\end{aligned}$$

O primeiro membro desta igualdade, sendo igual ao integral da função $\left| f(x) - S_N(x) \right| \geq 0$, é necessariamente um número real maior ou igual que zero. Resulta assim que

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \;\leq\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \right)^2 dx$$

Sendo isto verdadeiro para qualquer $N \in \mathbb{N}$, resulta que a série de termos não negativos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

é convergente. Em particular, pela condição necessária de convergência das séries,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} |c_{-n}|^2 = 0$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} c_n \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} c_{-n} = 0$$

Usando as relações entre os coeficientes na forma real e complexa, obtém-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (c_n + c_{-n}) \;=\; 0, \\
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} i(c_n - c_{-n}) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

### 1.9.3 Convergência num Ponto de Continuidade de $f$

Considerando agora uma função $\phi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ que seja seccionalmente contínua. Denotando os coeficientes da sua série de Fourier real por

$$\tilde{a}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \cos n\theta \, d\theta \qquad \text{e} \qquad \tilde{b}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta$$

resulta que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \operatorname{sen}\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \left(\operatorname{sen} n\theta \cos\tfrac{\theta}{2} + \cos n\theta \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\phi(\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\phi(\theta)\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\right) \cos n\theta \, d\theta \\ &= \pi \tilde{b}_n + \pi \tilde{a}_n. \end{aligned}$$

onde

$$\text{e} \qquad \tilde{b}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\phi(\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta \qquad \text{e} \qquad \tilde{a}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\phi(\theta)\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\right) \cos n\theta \, d\theta.$$

Tendo em conta que $\tilde{b}_n$ e $\tilde{a}_n$ são coeficientes das séries de Fourier das funções $\phi(\theta)\cos\frac{\theta}{2}$ e $\phi(\theta)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, respectivamente, podemos pois concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \operatorname{sen}\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right) ds = \lim_{n\to\infty} \left(\pi \tilde{b}_n + \pi \tilde{a}_n\right) = 0 \tag{1.30}$$

Recuperando agora a expressão de $S_N(x)$ obtida a partir do núcleo de Dirichlet (ver subsecção 1.6, equação (1.7)),

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) D_N(\theta) \, d\theta$$

onde $f$ foi estendida periodicamente a $\mathbb{R}$ e

$$D_N(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Vimos também que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) \, d\theta = 1.$$

Desta forma,

$$f(x) = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, D_N(\theta) \, d\theta$$

(note que $f(x)$ é constante relativamente à variável de integração, $\theta$). Subtraindo as expressões acima,

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x+\theta) - f(x)\Big) D_N(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+\theta)-f(x)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}}_{\| \ \phi(\theta)} \operatorname{sen}\left((N+\tfrac{1}{2})\theta\right) d\theta. \end{aligned} \tag{1.31}$$

O quociente $\phi(\theta)$ não está aparentemente bem definido em $\theta = 0$. Porém,

$$\phi(\theta) \;=\; \frac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta} \;\cdot\; \frac{\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

e tendo em conta que $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = 1$, podemos concluir que:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \phi(\theta) = f'_e(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta\to 0^+} \phi(\theta) = f'_d(x).$$

onde $f'_e(x)$ e $f'_d(x)$ representam as derivadas à esquerda e à direita de $f$ num ponto $x$ onde $f$ é contínua. Desta forma, $\phi$ é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$. Tomando agora, na equação (1.31), o limite quando $N \to \infty$, e usando (1.30):

$$S_N(x) - f(x) \;=\; \int_0^{\pi} \phi(\theta) \operatorname{sen}\Big(\big(N+\tfrac{1}{2}\big)\theta\Big)\, d\theta \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{quando} \quad N \to \infty.$$