

Exercícios Resolvidos

Diferenciabilidade

Exercício 1 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Resolução: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ podemos simplesmente derivar f em ordem a x e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \sin(x^2 + y^2) + \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2} 2x \cos(x^2 + y^2)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0.$$

Para calcular a segunda derivada parcial usamos a definição e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Exercício 2 Considere a função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Calcule a derivada de f no ponto $(0, 1)$.

b) Calcule a derivada de f no ponto $(1, 0)$ segundo o vector $v = (1, 1)$.

Resolução:

a) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, temos,

$$Df(0, 1) = \nabla f(0, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \right) = (0, 1).$$

b) $D_v f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot v = (1, 0) \cdot (1, 1) = 1$

Exercício 3 Considere a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

- Caracterize topologicamente o domínio de f .
- Descreva os conjuntos de nível de f .
- Calcule a derivada de f no ponto $(0, 1)$.
- Calcule as derivadas direccionais de f no ponto $(1, 0)$.

Resolução:

- Dado que deveremos ter $x^2 + y^2 > 0$, o domínio de f é o conjunto aberto, não limitado e conexo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Cada conjunto de nível C_α de f será caracterizado pela condição $f(x, y) = \alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, teremos

$$C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2 + y^2) = \alpha\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^\alpha\}$$

e, portanto, os conjuntos de nível de f serão as circunferências centradas na origem.

- Note-se que as derivadas parciais de f são contínuas no domínio de f e, portanto, a função f é diferenciável e a sua derivada no ponto $(0, 1)$ será representada pela matriz

$$Df(0, 1) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{array} \right]_{(0,1)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \end{array} \right].$$

Alternativamente, teremos

$$Df(0, 1) = \nabla f(0, 1) = (0, 2).$$

- Seja $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ um vector unitário qualquer. Então, a derivada de f segundo w será dada por

$$D_w f(1, 0) = \left[\begin{array}{cc} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{array} \right]_{(1,0)} \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right] = 2u$$

Exercício 4

Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + 3y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

b) Diga, justificando, se f é diferenciável na origem.

Resolução:

a) As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

b) A função f é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = 0,$$

ou seja, sse

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 3y^4} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Calculando os limites direcionais, fazendo $y = mx$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{(x^2 + 3m^4 x^4) \sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{(1 + 3m^4 x^2) |x| \sqrt{1 + m^2}}.$$

Como temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx}{(1 + 3m^4 x^2) |x| \sqrt{1 + m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{mx}{(1 + 3m^4 x^2) |x| \sqrt{1 + m^2}} = -\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}},$$

podemos concluir que o limite não existe e portanto f não é diferenciável na origem.

Exercício 5

Considere a função dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Mostre que g é contínua na origem.
2. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$ e mostre que g é diferenciável na origem.
3. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}$ nos restantes pontos de \mathbb{R}^2 e diga, justificando, se g é de classe C^1 .

Resolução:

a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que $2x^2 + y^4 \geq 2x^2$, tem-se

$$|g(x, y) - g(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y^2}{2x^2 + y^4} - 0 \right| \leq \frac{x^2 y^2}{2x^2} = \frac{y^2}{2} \rightarrow 0.$$

b) Como $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ conclui-se que no ponto $(0, 0)$ se tem $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é $Dg(0, 0) = [0 \ 0]$. Portanto g é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(h, k) - g(0, 0) - Dg(0, 0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{h^2 k^2}{(2h^2 + k^4)\|(h, k)\|} = 0,$$

uma vez que

$$\left| \frac{h^2 k^2}{(2h^2 + k^4)\|(h, k)\|} \right| \leq \frac{h^2}{2h^2} \frac{k^2}{\|(h, k)\|} \leq \frac{1}{2} \frac{h^2 + k^2}{\|(h, k)\|} = \frac{\|(h, k)\|}{2} \rightarrow 0.$$

c) Tem-se, se $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{2x^2 + y^4} - \frac{4x^3 y^2}{(2x^2 + y^4)^2}.$$

Se $y \neq 0$ obtém-se $\frac{\partial g}{\partial x}(y^2, y) = \frac{2}{9}$ e portanto g não é de classe C^1 porque $\frac{\partial g}{\partial x}$ não é contínua na origem devido a ter-se $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$.