Cálculo Diferencial e Integral II

LEMec, LENO

Micro-teste 1 (v. C1)— 18/03/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Aconselha-se a só trabalhar na questão III após resolver completamente as anteriores. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** _________ **Curso:** _________

I - Seja A o conjunto $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

[4,0 val.] a) Indique o interior e a fronteira de A.

[4,0 val.] b) O conjunto A é aberto? E fechado?

II - Seja $f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$. Calcule, ou mostre que não existe, cada um dos seguintes limites:

[5,0 val.] a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x, y)$

[7,0 val.] b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMEC, LEAN

Micro-teste 2 (v. C2) — 25/03/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** ________ **Curso:** ________

[6,0 val.] **I** - Calcule a matriz Jacobiana de $f(x,y) = \left(\pi - x, \log(x^2+y^2) - y^2, e^{2+y^2} - x^2\right)$.

II - Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[6,0 val.] **(a)** Calcule o gradiente de f, nos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ onde exista.

[4,0 val.] **(b)** Sendo $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, calcule $D_v f(3,-1)$.

[4,0 val.] **(c)** Indique se f é ou não diferenciável em $(0,0)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMEC, LEAN

Micro-teste 3 (v. B2) — 1/04/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** ________ **Curso:** ________

[12,0 val.] **I** - Seja $f(x,y,z) = \left(xy^2, \operatorname{sen}(xz) + x, x - z^2\right)$ e $g(u,v,w) = u^2e^v + \ln(1+w^2)$. Sendo $h = g \circ f$, calcule $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1,0)$.

[8,0 val.] **II** - Seja $C = \left\{(1+e^t, t^2-3, t^3+1) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Determine a recta tangente e o plano normal a C no ponto $(1,-3,1)$.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMec, LEAN

Micro-teste 4 (v. A2) — 07/04/2022, 5ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** ________ **Curso:** ________

I - Seja $f(x, y) = y^3 - 3x^2y + x^3 - 12y$

[5,0 val.] **(a)** Calcule o gradiente de f.

[5,0 val.] **(b)** Determine os pontos de estacionaridade de f.

[5,0 val.] **(c)** Calcule a matriz Hessiana de f.

[5,0 val.] **(d)** Classifique os pontos de estacionaridade de f.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMEC, LEAN

Micro-teste 5 (v. C1) — 22/04/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** _________ **Curso:** _________

I - Considere

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ y^2 - z = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

[10,0 val.] **(a)** Mostre que este sistema de equações define implicitamente (x, z) como função de y, com as soluções do sistema $\big(x(y), y, z(y)\big)$ válidas numa vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$.

[10,0 val.] **(b)** Calcule as derivadas de $x(y)$ e $z(y)$ no ponto $y = 1$.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMec, LEAN

Micro-teste 6 (v. B1) — 13/05/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** _________ **Curso:** _________

[20,0 val.] **I** - Determinar os extremos absolutos da função definida por

$$f(x,y) \;=\; 2x^2 \;+\; (y-1)^2$$

no conjunto

$$D \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\Big\}.$$

Determine também os correspondentes pontos de máximo e de mínimo.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMec, LEAN

Micro-teste 7 (v. A1) — 26/05/2022, 5ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** ________ **Curso:** ________

I - Considere o conjunto

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 0 < x < 1 \; ; \; 0 < z < 4 - y^2 \; ; \; |y| < 1 \right\}.$$

[10,0 val.] **(a)** Escreva uma expressão para o volume de E em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

[10,0 val.] **(b)** Calcule o volume de E.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMec, LEAN

Micro-teste 8 (v. C1) — 03/06/2022, 6ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** _________ **Curso:** _________

[20,0 val.] **I** - Considere a região

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 < 2 \,, \ z > 0 \right\}.$$

com densidade de massa dada pela função $\sigma(x,y,z) = z+1$. Utilizando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume e a massa do sólido.

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMEC, LEAN

Micro-teste 9 (v. A2) — 06/06/2022, 2ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** ________ **Curso:** ________

[10,0 val.] **I** - Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule a massa de

$$D \;=\; \Big\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x+y < 3\,,\; 0 < 2y - x < 4 \,\Big\}$$

sendo a densidade de massa $\sigma(x,y) = 4 - x - y$

[10,0 val.] **II** - Calcule $g'(y)$, sendo

$$g(y) \;=\; \int_{y^2}^{1} e^{xy+y^2}\, dx.$$

Cálculo Diferencial e Integral II

LEMEC, LEAN

Micro-teste 10 (v. A1) — 23/06/2022, 5ª feira

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 15m.

Nome: ______________________________ **Nº:** _________ **Curso:** _________

I - Considere o campo vectorial $F(x,y) = \big(2xy + y^2,\, 2xy + x^2\big)$.

[10,0 val.] (a) Determine se F é ou não um campo conservativo (ou gradiente) em $\mathbb{R}^2$. Em caso afirmativo, calcule um seu potencial.

[10,0 val.] (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $G(x,y) = F(x,y) + (-y,x)$ ao longo da fronteira, Γ, do conjunto

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < x,\ x^2 + y^2 < 9 \Big\},$$

percorrida no sentido positivo. *Sugestão:* use o teorema de Green.