

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 8

(Mudança de Variáveis de Integração. Regra de Leibniz)

1. Escreva o integral  $\int \int_S f(x, y) dx dy$  em coordenadas polares considerando as seguintes regiões  $S$ .

(a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x > |y|\}$ .

(b)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y > x\}$ .

(c)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq x\}$ .

2. Utilizando coordenadas polares (possivelmente modificadas), calcule

(a)  $\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx$ .

(b)  $\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy \right) dx$ .

(c)  $\int \int_U (x^2 + y^2 - 1) dx dy$ , sendo  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1; y > 0\}$ .

(d)  $\int \int_S \sin((x-1)^2 + y^2) dx dy$ , sendo  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\}$ .

(e) A área da região  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1; x > |y|\}$ .

3. Considere a transformação de coordenadas definida por

$$x = 2u + v, \quad y = u^2 - v.$$

(a) Sendo  $T$  o triângulo com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$  no plano  $uv$ , determine a imagem de  $T$  no plano  $xy$  pela transformação de coordenadas.

(b) Sendo  $S$  o conjunto determinado na alínea anterior, calcule  $\int \int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} dx dy$ .

4. Considere o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2; 0 < x < y\},$$

e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (y^2 - x^2) \cos(x + y)^4$ . Calcule  $\int_D f$  utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

5. Considere a região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4; 3x \leq y \leq 5x; x \geq 0; y \geq 0\},$$

com densidade de massa igual a  $\sigma(x, y) = \frac{2y}{x}$ . Calcule a área e a massa de  $R$  utilizando uma transformação de coordenadas apropriada.

6. Use coordenadas cilíndricas ou coordenadas esféricas para exprimir o volume de cada uma das seguintes regiões em termos de um só integral iterado:

(a)  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$

(b)  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z > \sqrt{x^2 + y^2}\}.$

7. Calcule o momento de inércia do sólido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1; 0 \leq x \leq (y^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}; y \geq 0; z \geq 0\},$$

relativamente ao eixo  $Ox$ , e cuja densidade de massa é dada por  $\sigma(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$ .

8. Calcule o volume de cada uma das regiões:

(a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - (\sqrt{y^2 + z^2} - 1)^2; y \geq 0; z \geq 0\}$

(b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 < 1; y \geq 0; z > 0\}.$

9. Calcule o volume de intersecção de uma bola de raio  $R > 0$  em  $\mathbb{R}^3$  com um cilindro de raio  $r < R$  cujo eixo passa pelo centro da bola.

10. Calcule  $F'(0)$  onde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida pela expressão

$$F(t) = \int_0^1 \text{sen}(tx^2 + x^3) dx.$$

11. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Calcule  $G'(x)$  onde  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida pela expressão

$$G(x) = \int_x^{x^3} f(tx, t^2 + x^3) dt.$$

12. Sendo  $V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq t; 0 \leq z \leq 1; y > 0\}$  e  $F : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$F(t) = \int \int \int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2)}}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

calcule  $F'(4)$ .

13. Prove o *Teorema de Pappus*: Se  $D$  é uma região limitada no 1º quadrante do plano  $xy$  com área  $A > 0$ , então o volume do sólido que se obtém por rotação de  $D$  em torno do eixo  $Oy$  é dado por

$$V = 2\pi A \bar{x}$$

onde  $\bar{x}$  é a coordenada  $x$  do centróide da região  $D$ .