

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

a) $f(x, y) = xy^3$.

b) $f(x, y) = x \cos(xy)$.

c) $f(x, y) = \begin{cases} ye^{xy}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Invertendo a ordem de integração, calcule:

a) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2) dx \right) dy$.

b) $\int_0^1 \left(\int_{\arcsen y}^{\pi/2} y \sen x dx \right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos:

a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.

b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$.

c) $\int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{2+x} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-|x|} f(x, y) dy \right) dx$.

4. Calcule a área da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x < y < 3 - x^2\},$$

usando um integral iterado da forma $\int (\int dx) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) a coordenada x do centróide.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}$ nas ordens $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e $\int (\int (\int dy) dx) dz$.

b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; y^2 + z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e $\int (\int (\int dz) dy) dx$.

c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x ; 0 \leq z \leq x ; x \leq 1\}$ nas ordens $\int (\int (\int dx) dz) dy$ e $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

6. Para cada um dos conjuntos seguintes escreva uma expressão para o respectivo volume, usando um único integral triplo:

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x ; 0 \leq z \leq x ; x \leq 1\}$,

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq x^2 - y^2 ; x > 0\}$.

7. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1 ; x + y - 2z \leq 1 ; x \geq 0 ; y \geq 0\}.$$

Calcule o volume de V na forma:

a) $\int \dots (\int \dots (\int \dots \dots dy) dx) dz$.

b) $\int \dots (\int \dots (\int \dots \dots dz) dx) dy$.

8. Calcule $\int_V f$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

a) $f(x, y, z) = z$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = x + y$.

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

9. Calcule a primeira coordenada do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 0$ e $x = 1$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dydx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

11. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Trocando a ordem de integração, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{1-x-y}^1 g(z) dz dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 g(z)z(2-z) dz.$$