

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 3

(Derivada da Função Composta)

1. Calcule a derivada  $D(f \circ g)(1, 1)$  em que

$$g(x, y) = (e^{x-y}, x - y); \quad f(u, v) = (u + \arctan v, 2e^v + u, \ln(u + 2v)).$$

2. Considere as funções  $\gamma(t) = (\sin t, t^2, \cos t)$ ,  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$  e  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$ . Calcule a derivada  $\sigma'(t)$ .

3. Considere a função  $f(x, y, z) = ye^x + xz^2$  e seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $g(0, 0) = (0, 1, 2)$  e

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada  $D_v(f \circ g)(0, 0)$  em que  $\vec{v} = (1, 2)$ .

4. Considere a função  $\sigma(x) = f(\sin x, x + e^x)$  em que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é de classe  $C^1$  e tal que

$$Df(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada  $\sigma'(0)$ .

5. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y - z, xye^z)$$

e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável.

- a) Calcule  $\frac{\partial}{\partial y}(g \circ f)(1, 1, 0)$ , sabendo que  $\nabla g(2, 2, 1) = (-1, 0, 3)$ .

- b) Para  $g(u, v, w) = u^2 - v^2 + e^w$ , calcule  $\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)(0, 1, 0)$ .

6. Determine a reta tangente e a reta normal à curva definida por

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

no ponto  $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ .

7. Determine a reta tangente e o plano normal à linha definida por

$$\{(e^t, \cos t, \sin t) ; -\pi < t < \pi\}$$

no ponto  $(1, 1, 0)$ .

8. Determine a reta normal e o plano tangente ao parabolóide

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\}$$

no ponto  $(0, 1, 0)$ .

9. Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Determine

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(g(x^2, xy, x+y) + e^x, xy, g(x, x, x)))$$

em função das derivadas parciais de  $g$ .

10. Sejam  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$  e tais que se verifica a equação  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ . Supondo que  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$  calcule a derivada  $Dg(x, y)$ .

11. Determine os pontos da superfície  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - z^2 + 1 = x\}$  tais que a recta normal à superfície em cada um desses pontos passa pela origem.

12. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{(y-z)^2}{2} + (y+z)^2 = 12 \right\}.$$

Determine os pontos de  $S$  onde o plano tangente é horizontal.