

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

b) $g(x, y) = \frac{y}{x}$

2. Calcule, se existirem, as derivadas parciais na origem das funções:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $g(x, y) = \max\{x^2, y\}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = (xy, \log(xy))$

b) $g(x, y, z) = (\sqrt{xy}, e^{yz})$

c) $h(x, y, z) = (y^2, xz - y, z + xy)$

d) $\phi(x, y, z) = y^2 - xyz + 2z$

e) $\gamma(t) = (t^3, e^{-t}, \frac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector v indicados:

a) $f(x, y) = y^x$; $P = (2, 1)$; $v = (1, 1)$

b) $g(x, y, z) = e^z + xy$; $P = (1, 1, 1)$; $v = (1, -1, 1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x, y) = x(y^2 + xy)$, no ponto $(1, 2)$ é nula.

6. Mostre que a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ é diferenciável na origem e calcule a respectiva derivada.

7. Considere as funções:

i) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ii) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iii) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

8. Considere a função: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0, 1)$.
 - Calcule a derivada de f no ponto $(0, 1)$ segundo o vector $(2, 1)$.
 - Calcule a derivada de f no ponto $(0, 0)$ segundo o vector $(2, 3)$.
9. Dê um exemplo de uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:
- Para todo o $v \in \mathbb{R}^2$, existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$;
 - f é descontínua em $(0, 0)$.
10. Considere a função: $f(x, y) = \begin{cases} |x|, & \text{se } y = x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- Analise f quanto à continuidade em $(0, 0)$.
 - Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0, 0)$.
 - Calcule $Df(0, 0) \cdot v$, para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
 - Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$, para $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
 - Determine se f é diferenciável em $(0, 0)$.
11. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:
- f tem derivadas parciais em todos os pontos de \mathbb{R}^2 ;
 - $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0, 0)$.
- Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$.