

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 10

(Campos Fechados. Campos Gradientes. Teorema Fundamental do Cálculo)

1. Para cada um dos casos seguintes determine se o campo vetorial é ou não conservativo. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

a) $a(x, y) = (y^2, x^3)$.

b) $b(x, y) = (x^3 + y, y^2 + x)$.

c) $c(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

d) $d(x, y, z) = (y, x, 2z)$.

e) $e(x, y, z) = (-y, x, z)$.

f) $f(x, y, z) = (2xe^{yz}, x^2ze^{yz}, x^2ye^{yz})$.

2. Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, 2z\right).$$

a) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida por

$$\{(\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha definida pelas equações

$$y^2 + z^2 = 1; x = y^2 - z^2$$

segundo um sentido à sua escolha.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $G(x, y) = (y \exp(xy) + 2x, x \exp(xy))$ ao longo do caminho definido por $g(t) = (t^2 + 5t^4, \cos 2t)$, $t \in [0, \pi]$.

4. Seja

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3z}{x^2+z^2} + \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, -\frac{3x}{x^2+z^2}\right).$$

a) Calcule o trabalho de F ao longo da circunferência definida pelas equações $x^2 + z^2 = 1$, $y = 4$ orientada no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 10, 0)$.

b) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

5. Seja $\alpha:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que o campo vetorial radial

$$F(x, y) = \alpha(r) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$

é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.