

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 1

(Topologia. Limites. Continuidade)

1. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

- a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \pi\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1; x \in \mathbb{Q}\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$
- f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$
- g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; y = x\}$
- h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$
- i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x; x > 0\}$
- j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1; y = \sin(\frac{1}{x})\}$

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{(x-2)^2 y^2}{(x-2)^2 + y^2}$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2)$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{\sin^2 x + y^2}$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão:** Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$)
- h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 \ln(x^2 + y^4)$.

3. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

a) $f(x, y) = e^{x^2+3y}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

4. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para toda a reta $L \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(0, 0)$, se tem

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in L}} f(x, y) = f(0, 0).$$

Diga, justificando, se f é necessariamente contínua em $(0, 0)$.

5. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem os limites $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ e se tem

$$f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y).$$

Diga, justificando, se f é necessariamente contínua em $(0, 0)$.