



Análise Matemática IV

2º Teste

20 de Dezembro de 2003

Licenciatura em Engenharia Civil

Duração do teste: 1 h e 30 min

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(6 val) 1. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine e^{At} , para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = AX & \text{se } t \in \mathbb{R} \\ X(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Resolução:

a) Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Para calcular o(s) vector(es) próprio(s) associados, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(\mathbf{A} - I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = 0 \wedge a + c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$$

Concluimos que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável, mas é semelhante a uma matriz de Jordan com um bloco 3×3 . Isto é

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1}$$

em que,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_{g1} \quad \mathbf{v}_{g2}]$$

em que $\mathbf{v}_{g1}$ e $\mathbf{v}_{g2}$ são vectores próprios generalizados. $\mathbf{v}_{g1}$ é então solução da equação:

$$(\mathbf{A} - I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = 1 \wedge a + c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v}_{g1} = (a, b, c) = (a, 1, -a) = (0, 1, 0) + a(1, 0, -1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v}_{g1} = (0, 1, 0)$$

Quanto a $\mathbf{v}_{g2}$, ele é solução da equação:

$$(\mathbf{A} - I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_{g1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = 0 \wedge a + c = 1$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v}_{g2} = (a, b, c) = (a, 0, 1 - a) = (0, 0, 1) + a(1, 0, -1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v}_{g2} = (0, 0, 1)$$

Tem-se então que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$e^{t\mathbf{A}} = e^t \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & -t & 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

b) A solução do PVI, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}(t+1)}\mathbf{x}(-1) = e^{t+1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(t+1)^2}{2} & t+1 & \frac{(t+1)^2}{2} \\ t+1 & 1 & t+1 \\ -\frac{(t+1)^2}{2} & -(t+1) & 1 - \frac{(t+1)^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{t+1} \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \\ -(t+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4 val) **2.** Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} & \text{se } t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Resolução:

A solução da equação

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \tag{1}$$

será

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

em que $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada, e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação completa.

Para determinar a solução geral da equação homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

note-se que a equação característica é

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Então

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{2t}$$

são 2 soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_h(t) = ae^t + be^{2t}$$

Para calcular y_p , sendo $b(t) = e^{2t}$ solução da equação diferencial

$$y' - 2y = (D - 2)y = 0$$

teremos, aplicando $P_A(D) = D - 2$ à nossa equação:

$$(D - 2)(D - 1)(D - 2)y = (D - 2)e^{2t} \Leftrightarrow (D - 2)^2(D - 1)y = 0$$

Esta equação admite como solução geral (atendendo a que as soluções do polinómio característico são 1 de multiplicidade 1 e 2 de multiplicidade 2)

$$y(t) = ae^t + be^{2t} + cte^{2t}$$

Dado que $a + be^t + cte^t$ é y_h , conclui-se que cte^{2t} é a candidata a solução particular. Resta agora calcular a constante c de modo a que $y_p(t) = cte^{2t}$ seja solução da equação. Assim

$$y_p(t) = cte^{2t}, \quad y'_p(t) = c(1 + 2t)e^{2t}, \quad y''_p(t) = c(4 + 4t)e^{2t}$$

pelo que

$$y''_p - 3y'_p + 2y_p = e^{2t} \Leftrightarrow c = 1$$

Tem-se então que $y_p(t) = te^{2t}$, e a solução geral de (1) é

$$y(t) = ae^t + be^{2t} + te^{2t}$$

Dado que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, concluimos que:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

pelo que

$$y(t) = te^{2t}$$

(6 val) **3.** a) Determine a série de Fourier **de senos** associada à função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$.

b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } x \in]0, 1[, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = 0 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(1, t) = 1 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = 1 & \text{se } x \in]0, 1[\end{cases}$$

Sugestão: comece por procurar uma solução estacionária (independente de t), que seja satisfeita pela equação diferencial e condições de fronteira.

Resolução:

(a) A série de Fourier de senos associada a f será

$$SS[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

em que

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= -(1 - x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Assim

$$SS[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

(b) Para resolver o problema de valores na fronteira, começamos por obter uma solução estacionária para o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \text{se } x \in]0, 1[, t \in \mathbb{R}^+ \\ v(0, t) = 0 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \\ v(1, t) = 1 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Como $v = v(x)$, a equação diferencial reduz-se a:

$$\frac{1}{2}v''(x) = 0$$

A solução geral é:

$$v(x) = A + Bx$$

Usando as condições de fronteira, obtemos:

$$v(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow v(x) = Bx$$

$$v(1) = 1 \Rightarrow B = 1$$

Desta forma, $v(x)=x$ é uma solução estacionária do problema acima.

Podemos encontrar a solução pretendida sob a forma

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) = x + w(x, t)$$

onde $w(x, t)$ é uma solução do problema homogéneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \text{se } x \in]0, 1[, t \in \mathbb{R}^+ \\ w(0, t) = 0 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \\ w(1, t) = 0 & \text{se } t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Para tal, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $w(x, t) = X(x)T(t)$ e substituindo na equação, obteremos

$$X(x)T'(t) = \frac{1}{2}X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{2T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x , para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0, \pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{2T'}{T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$w(0, t) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$w(1, t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0, \pi[\\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

e

$$T' = \frac{1}{2}\lambda T \quad (3)$$

Para resolver (2), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio característico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \quad \forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A(e^{\mu x} - e^{-\mu x})$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu$$

$$\Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = -B = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A \sin(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A \sin \mu = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } \mu = k\pi, k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2\pi^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k \sin(k\pi x)$.

Podemos agora resolver (3), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (2) é a solução nula que não nos interessa). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = -\frac{1}{2}k^2\pi^2 T \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-\frac{1}{2}k^2\pi^2 t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$w_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{-\frac{1}{2}k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e consequentemente qualquer combinação linear também o será, ou seja

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{2}k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x),$$

Para calcular as constantes A_k utilizaremos a condição inicial

$$u(x, 0) = 1$$

Assim

$$u(x, 0) = x + w(x, t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = 1$$

Donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = 1 - x$$

Utilizando o resultado da alínea (a), temos então

$$A_k = \frac{1}{n\pi}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e de fronteira é

$$u(t, x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

(4 val) 4. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = -2(\sin(e^{ty}) + 2)y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Mostre que o problema tem uma única solução definida numa vizinhança de $t_0 = 0$.
- Mostre que o intervalo máximo de existência da solução do problema é $\mathbb{R}$.
- Sendo $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a solução global do problema, determine:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t),$$

Resolução:

(a) A função

$$f(x, t) = -2(\sin(e^{ty}) + 2)y$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe em $\mathbb{R}^2$ e é contínua. Isto implica que f é uma função localmente lipshitziana. Pelo teorema de Picard,

o problema de valor inicial tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$.

(b) Para $y \neq 0$, a equação é equivalente a:

$$\frac{y'}{y} = -2 \operatorname{sen} \left(\operatorname{sen} (e^{ty}) + 2 \right)$$

Integrando esta igualdade de 0 a t , obtém-se:

$$\log y(t) - \log y(0) = \int_0^t -2 \left(\operatorname{sen} (e^{sy(s)}) + 2 \right) ds$$

Como, para quaisquer $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$-6 \leq -2 \left(\operatorname{sen} (e^{sy(s)}) + 2 \right) \leq -2$$

temos então que:

$$\begin{aligned} -6t &\leq \int_0^t -2 \left(\operatorname{sen} (e^{sy(s)}) + 2 \right) ds \leq -2t \quad \text{se } t > 0 \\ -2t &\leq \int_0^t -2 \left(\operatorname{sen} (e^{sy(s)}) + 2 \right) ds \leq -6t \quad \text{se } t < 0 \end{aligned}$$

Desta forma (e como $\log y(0) = \log 1 = 0$):

$$-6t \leq \log y(t) \leq -2t$$

Em primeiro lugar, isto implica que $y(t)$ nunca atinge o valor 0, pelo que a desigualdade estima o valor de $y(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. A mesma desigualdade implica também que $y(t)$ não explode em tempo finito, pois $\log y(t)$ é sempre finito para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, o teorema do prolongamento de solução garante a existência de uma solução global.

(c) Para $t > 0$, e utilizando a desigualdade obtida na alínea (b):

$$e^{-6t} \leq y(t) \leq e^{-2t}$$

Fazendo $t \rightarrow +\infty$, conclui-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Da mesma forma se conclui que, para $t < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$$