

Análise Matemática IV

1º Semestre 2006/2007

1º Teste

Cursos: LEEC e LEIC

28 de Outubro de 2006, 13h

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(3 val.) 1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, y) = \beta y^2 - 2x^2 + 3\beta x, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Determine os valores de β para os quais a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $\beta = 2$, determine a função $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f = u + iv$ é inteira e verifica $f(0) = i$.

(c) Calcule o valor do integral

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) 2. Calcule o valor do integral

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{(z-\pi)\sin^2 z} dz$$

considerando $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z| = 2\}$, percorrida uma vez no sentido positivo.

(2 val.) 3. Utilize o Teorema dos resíduos para determinar o valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx.$$

(2 val.) 4. (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ da função de variável complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \pi^2}.$$

válido na região $|z| > \pi$.

(b) Calcule

$$\oint_{|z|=2} z^6 e^{1/z} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

(1 val.) 5. Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

tem um polo. Mostre que F é um polinómio.,