TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2014/2015

2º Teste

(CURSO: MEAER)

20 de Dezembro de 2014

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial e determine os intervalos máximos das respectivas soluções

(1 val) (a) $\dfrac{dy}{dt} + y\,\mathrm{tg}\,t = \dfrac{\cos t}{t}, \qquad y(\pi) = -\log \pi$

(1 val) (b) $x + \dfrac{2x}{y+x^2} + \dfrac{1}{y+x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0, \qquad y(0) = -1$

Resolução:

(a) A equação é linear, e um seu factor integrante é dado por:

$$\mu(t) = e^{\int \mathrm{tg}\, t dt} = e^{\int \frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t} dt} = e^{-\log \cos t} = \frac{1}{\cos t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante, obtém-se

$$\frac{1}{\cos t}\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos^2 t} y = \frac{1}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{\cos t}\right) = \frac{1}{t}$$

A solução geral é:

$$\frac{y}{\cos t} = \log |t| + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$; para $\cos t \neq 0$ e $t \neq 0$, obtém-se:

$$y(t) = \cos t\big(\log |t| + C\big)$$

Pela condição inicial:

$$-\log \pi = y(\pi) = -\big(\log \pi + C\big) \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Assim,

$$y(t) = \cos t\, \log |t|$$

Tendo em conta que $y(t)$ está definida e é de classe C^1 para $t \neq 0$, que $\pi \in I_{\max}$ e que $y(t)$ não pode satisfazer a equação diferencial nos pontos onde $a(t) = \operatorname{tg} t$ não está definida, que são

$$\cos t = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

concluimos que o intervalo máximo de solução é $I_{\max} = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ e a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = \cos t \, \log t \qquad \forall t \in \left]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right[$$

(b) A equação pode-se escrever na forma $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$, com $M(x,y) = x + \frac{2x}{y+x^2}$ e $N(x,y) = \frac{1}{y+x^2}$. As funções M e N são de classe C^1 nas regiões simplesmente conexas $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y + x^2 > 0\}$ e $D^- = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y + x^2 < 0\}$, sendo que apenas D^- é relevante para o nosso problema pois o ponto inicial, $(x_0, y_0) = (0, -1)$, pertence a D^-. Por outro lado,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2x}{(y+x^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{para} \quad y + x^2 < 0.$$

Assim, a equação é exacta em D^-, pelo que existe $\phi : D^- \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = (M, N)$ em D^-. Primitivando ambos os membros da equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{y + x^2}$$

em ordem a y, obtém-se:

$$\phi(x,y) = \log\left|y + x^2\right| + g(x) = \log\left(-y - x^2\right) + g(x) \qquad \text{para} \quad y + x^2 < 0$$

Substituindo esta expressão de ϕ na equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x + \frac{2x}{y + x^2}$$

e primitivando em ordem a x, resulta que $g(x) = \frac{x^2}{2} + C$, pelo que $\phi(x,y) = \log\left(-y - x^2\right) + \frac{x^2}{2}$. Desta forma, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$\log\left(-y - x^2\right) + \frac{x^2}{2} = K \qquad \text{para} \quad y + x^2 < 0,$$

onde $K \in \mathbb{R}$. Pela condição inicial, $K = \phi(0, -1) = 0$, pelo que

$$\log\left(-y - x^2\right) + \frac{x^2}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2.$$

Esta função está bem definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $y(x) + x^2 = -e^{-\frac{x^2}{2}} < 0$, pelo que $\big(x, y(x)\big) \in D^-$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Podemos então concluir que $I_{\max} = \mathbb{R}$.

(0,5 val) 2. (a) Seja A uma matriz $n \times n$ de componentes reais, com $n \in \mathbb{N}$, tal que $A^2 = -I$. Mostre que para certas funções $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$e^{At} = \alpha(t)\ I + \beta(t)\, A \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R}.$$

Determine também $\alpha(t)$ e $\beta(t)$.

(1,5 val) (b) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, determine A^2 e e^{At} e resolva o problema de valor inicial

$$y' = Ay, \quad y(0) = (2, 3)$$

Resolução:

(a) Tendo em conta que $A^2 = -I$, as potências da matriz A são dadas por:

$$\begin{array}{cccc} A^0 = I & A^1 = A & A^2 = -I & A^3 = (-I)A = -A \\ A^4 = (-I)^2 = I & A^5 = A & A^6 = -I & A^7 = -A \\ A^8 = I & \ldots & & \end{array}$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$. Assim sendo:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA - \frac{t^2}{2!}I - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}I + \frac{t^5}{5!}A - \frac{t^6}{6!}I - \frac{t^7}{7!}A + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots\right) I \ + \ \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots\right) A \\ &= \cos t\ I \ + \ \operatorname{sen} t\ A. \end{aligned}$$

Como o raio de convergência de ambas as séries é $+\infty$, esta igualdade é válida para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(b) Como

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

então, pela alínea (a):

$$\begin{aligned} e^{At} &= \cos t\ I \ + \ \operatorname{sen} t\ A = \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + 3\operatorname{sen} t & -2\operatorname{sen} t \\ 5\operatorname{sen} t & \cos t - 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At}\,\mathbf{y}(0) \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + 3\operatorname{sen} t & -2\operatorname{sen} t \\ 5\operatorname{sen} t & \cos t - 3\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos t + 6\operatorname{sen} t - 6\operatorname{sen} t \\ 10\operatorname{sen} t + 3\cos t - 9\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos t \\ \operatorname{sen} t + 3\cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y = f(t)$$

(1 val) (a) Determine a solução do problema de valor inicial com condições iniciais dadas por $y(0) = y'(0) = 1$, e para $f(t) = 4t + 5\cosh t$.

(1 val) (b) Determine a solução geral da equação diferencial para $f(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2t}$.

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é $y'' + 4y = 0$, e as raízes do seu polinómio característico, $P(R) = R^2 + 4$, são $R = \pm 2\mathrm{i}$. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é:

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

O aniquilador de $f(t) = 4t + 5\cosh t = 4t + \frac{5}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{-t}$ é

$$P_A(D) = D^2(D-1)(D+1)$$

Logo, uma solução do problema de valor inicial terá que ser solução da equação diferencial

$$D^2(D-1)(D+1)\left(D^2+4\right)y = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + c_3 + c_4 t + c_5 e^t + c_6 e^{-t} \\ &= y_G(t) + c_3 + c_4 t + c_5 e^t + c_6 e^{-t} \end{aligned}$$

para certos $c_i \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = 4t + 5\cosh t \tag{1}$$

da forma $y_p(t) = c_3 + c_4 t + c_5 e^t + c_6 e^{-t}$. Substituindo esta expressão na equação (1), obtemos

$$4c_3 + 4c_4 t + 5c_5 e^t + 5c_6 e^{-t} = 4t + \frac{5}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{-t}, \qquad \text{para qualquer } \ t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 4c_3 = 0 \\ 4c_4 = 4 \\ 5c_5 = 5/2 \\ 5c_6 = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \\ c_5 = 1/2 \\ c_6 = 1/2 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = t + \cosh t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (1) é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t + \cosh t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $y'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + 1 + \operatorname{senh} t$, resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} c_1 + 1 = y(0) = 1 \\ 2c_2 + 1 = y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = t + \cosh t$$

(b) Pela alínea (a), uma matriz wronskiana para a equação homogénea associada é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t \end{bmatrix}.$$

Uma solução particular da equação $y'' + 4y = \frac{1}{\operatorname{sen} 2t}$ pode ser obtida a partir da fórmula da variação das constantes

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\operatorname{sen} 2s} \end{bmatrix} ds,$$

Tendo em conta que

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ 2\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \int^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\cos 2s & -\operatorname{sen} 2s \\ 2\operatorname{sen} 2s & \cos 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\operatorname{sen} 2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \int^t \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\cos 2s}{\operatorname{sen} 2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t \\ \frac{1}{2}\log|\operatorname{sen} 2t| \end{bmatrix} \\ &= -\frac{t}{2}\cos 2t + \frac{t}{4}\operatorname{sen} 2t \log|\operatorname{sen} 2t| \end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação é:

$$y(t) = y_G(t) + y_p(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{t}{4}\operatorname{sen} 2t \log|\operatorname{sen} 2t|,$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para} \quad x \in]0, 2\pi[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

onde $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(1 val) (a) Determine a série de cossenos de f em $[0, 2\pi]$, e estude-a quanto à convergência pontual no intervalo $[0, 2\pi]$

(1,5 val) (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

(0,5 val) (c) Mostre que a série que representa a solução converge uniformemente no conjunto onde a solução está definida.

Resolução:

(a) Como $L = 2\pi$, a série de cossenos de f é

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{2},$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{nx}{2}\, dx$$

Tendo em conta que $f(x)$ é nula no intervalo $[\pi, 2\pi]$, então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx = -\frac{(\pi - x)^2}{2\pi}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos \frac{nx}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left((\pi - x) \frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4}{n^2} \cos \frac{nx}{2}\bigg|_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{4}{\pi n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Assim:

$$SFf(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{nx}{2}.$$

A função f é seccionalmente de classe C^1, a sua extensão par, $\bar{f}(x)$, é contínua em $[-2\pi, 2\pi]$ e $f(-2\pi) = f(2\pi)$. Pelo teorema da convengência pontual das séries de Fourier, e (apenas) para $x \in [0, 2\pi]$:

$$SFf(x) = \bar{f}(x) = f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(b) Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ para a equação diferencial parcial e condições de fronteira (que são homogéneas). Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T'(t) + X(x)T(t) = 4X''(x)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(\frac{T'(t)}{T(t)} + 1\right) = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade, válida para qualquer $t > 0$ e $0 < x < 2\pi$, é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & \text{para } 0 < x < 2\pi \\ T'(t) = (4\lambda - 1)T(t) & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

onde λ é um número real.

Das condições de fronteira, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t) = 0$, resulta que as soluções não nulas da equação diferencial parcial da forma $T(t)X(x)$ devem verificar

$$T(t)X'(0) = T(t)X'(2\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos, em primeiro lugar, o problema de valores próprios (para $x \in [0, 2\pi]$):

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X'(0) = X'(2\pi) = 0. \tag{3}$$

O polinómio característico da equação diferencial, $P(R) = R^2 - \lambda$, tem raízes $R = \pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a expressão para as soluções da equação (3) depende do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\omega x + C\,\mathrm{sen}\,\omega x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais e $\omega = \sqrt{|\lambda|} \Leftrightarrow \lambda = -\omega^2$ (note que $\omega > 0$).

Impondo as condições de fronteira às soluções, $X(x)$, acima determinadas, e tendo em conta que

$$X'(x) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}Be^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ B & \text{se } \lambda = 0 \\ -\omega B\,\mathrm{sen}\,\omega x + \omega C\cos\omega x & \text{se } \lambda < 0, \end{cases}$$

temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(B - C) = 0 \\ \sqrt{\lambda}Be^{\sqrt{\lambda}2\pi} - \sqrt{\lambda}Ce^{-\sqrt{\lambda}2\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = B \\ \sqrt{\lambda}B(e^{\sqrt{\lambda}2\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}2\pi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$ resulta apenas que $B = 0$, pelo que obtemos as soluções $X(x) = C$.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} \omega C = 0 \\ -\omega B\,\mathrm{sen}\,2\omega\pi + \omega C\cos 2\omega\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \omega = \frac{n}{2}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde as possíveis soluções não nulas são $X(x) = B\cos\frac{nx}{2}$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ (correspondentes a $\omega = \frac{n}{2}$ e $\lambda = -\frac{n^2}{4}$).

Em consequência, a solução do problema de valores próprios é:

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = 0 & , & X_0(x) = 1 \\ \lambda_n = -\frac{n^2}{4} & , & X_n(x) = \cos\frac{nx}{2} \quad , \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T, obtém-se:

$$T' = -\left(n^2 + 1\right) T \qquad ; \qquad \text{com } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Trata-se de uma equação linear, homogénea, de primeira ordem. Logo, as soluções são da forma $T(t) = De^{-(n^2+1)t}$; para cada $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, podemos tomar

$$T_n(t) = e^{-(n^2+1)t}.$$

As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos de produto por uma constante) funções da forma:

$$\begin{array}{l} u_0(x,t) = T_0(t)X_0(x) = e^{-t} \\ u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = e^{-(n^2+1)t}\cos\frac{nx}{2} \quad , \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

Procuramos agora uma solução formal do problema (2) que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; isto é:

$$u(x,t) = A_0 e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n^2+1)t}\cos\frac{nx}{2}$$

Utilizando a condição inicial e o resultado da alínea (a), obtemos:

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{nx}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{nx}{2}$$

pelo que:

$$A_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad A_n = \frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Assim sendo, a solução de (2) é:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) e^{-(n^2+1)t}\cos\frac{nx}{2}. \tag{4}$$

(c) Para qualquer $x \in [0, 2\pi]$ e $t \geq 0$, o termo geral da série(4) pode satisfaz:

$$\begin{aligned} \left|\frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) e^{-(n^2+1)t}\cos\frac{nx}{2}\right| &\leq \frac{4}{\pi n^2} \underbrace{\left(1 + \left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\right)}_{\leq 2} \underbrace{e^{-(n^2+1)t}}_{\leq 1} \underbrace{\left|\cos\frac{nx}{2}\right|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{n^2} < \frac{4}{n^2} \qquad (\text{para } n \geq 1) \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ é uma série convergente então, pelo critério de Weierstrass, a série (4) converge uniformemente no conjunto $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } t \geq 0\}$.

(1,0 val) 5. Considere o problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} x'' + 2t\,x' = y \\ y' = \operatorname{sen}(y + e^y) + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única definida em $\mathbb{R}$.

Resolução: Tendo em conta que a segunda das equações diferencias do sistema é independente da primeira, podemos começar por considerar o problema de valor inicial:

$$y' = \operatorname{sen}(y + e^y) + 1, \qquad y(0) = 0 \tag{5}$$

Seja $f(y) = \operatorname{sen}(y + e^y) + 1$; esta função está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}$, o que implica que é lipshitziana (e contínua) em $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Picard, o problema de valor inicial (5) tem solução única, de classe C^1, definida num intervalo da forma $]a, b[$, com $a < 0 < b$. Pelo teorema de extensão de solução — e dado que a fronteira do domínio de f é o conjunto vazio — ou $b = +\infty$ (respectivamente, $a = -\infty$), ou a solução, $y(t)$, explode quando $t \to b^-$ e $b < +\infty$ (respectivamente, $t \to a^+$ e $a > -\infty$). Temos também que

$$|f(y)| \leq 2\,, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dado que a única solução de (5) satisfaz a equação integral equivalente a (5)

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f\big(y(s)\big)\,ds = \int_0^t f\big(y(s)\big)\,ds$$

então, para qualquer $t \in]a, b[$:

$$|y(t)| \leq \int_0^t \big|f\big(y(s)\big)\big|\;|ds| \leq \int_0^t 2\,|ds| = 2|t|$$

Isto mostra que $y(t)$ não explode em tempo finito, em ambos os extremos do seu intervalo máximo de solução; concluímos então que $y(t)$ está definida (e é de classe C^1) em $\mathbb{R}$.

Determinemos agora o intervalo máximo de solução do que resta do problema de valor inicial do enunciado, que é:

$$x'' + 2t\,x' = y, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2. \tag{6}$$

Note que a equação diferencial é linear de 2ª ordem com coeficientes definidos por funções contínuas em $\mathbb{R}$; além disso, o seu termo não homogéneo é a solução $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do PVI (5), de classe C^1, cuja existência e unicidade demonstrámos previamente.

Consideremos agora o PVI linear de primeira ordem equivalente a (6):

$$\begin{cases} x' = z \\ z' = -2tz + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 2 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Ora $u_1(t) = 1$ e $u_2(t) = \int e^{-t^2} dt$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea $x'' + 2t\,x' = 0$, que estão definidas em $\mathbb{R}$ e são de classe C^1 (efectue o seu cálculo); assim, existe para a mesma uma matriz wronskiana definida em $\mathbb{R}$. Desta forma, o problema linear (7) tem solução única, e que está bem definida em $\mathbb{R}$ (pela fórmula da variação das constantes).