TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2013/2014

2º Teste

(CURSO: MEAER)

21 de Dezembro de 2013, 9h - 10h30m

[1,5 val.] 1. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x - 4y^2x + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad , \qquad y(0) = \frac{3}{2}$$

e indique o intervalo máximo de existência da solução.

Resolução: A equação pode escrever-se na forma

$$\frac{dy}{dx} = x\left(4y^2 - 1\right) \Leftrightarrow \frac{y'}{4y^2 - 1} = x$$

Esta equação é separável, e a sua solução geral é:

$$\int \frac{1}{4y^2 - 1}\, dy = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ e

$$\int \frac{1}{4y^2 - 1}\, dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2y-1} - \frac{1}{2y+1}\right) dy = \frac{1}{4}\big(\log|2y-1| - \log|2y+1|\big) + C_2 = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2y-1}{2y+1}\right| + C_2$$

Então,

$$\log\left|\frac{2y-1}{2y+1}\right| = 2x^2 + D, \qquad \text{com } \ D \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\left|\frac{2y-1}{2y+1}\right| = e^D e^{2x^2} \Leftrightarrow \frac{2y-1}{2y+1} = Ke^{2x^2} \qquad \text{com } \ K = \pm D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Tendo em conta que $y(0) = \frac{3}{2}$ então:

$$\frac{2\cdot(3/2) - 1}{2\cdot(3/2) + 1} = K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

A solução é, então, dada por:

$$\frac{2y-1}{2y+1} = \tfrac{1}{2}e^{2x^2} \Leftrightarrow 2y - 1 = (2y-1)\tfrac{1}{2}e^{2x^2} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{2x^2}}{2 - e^{2x^2}}$$

Esta solução não está definida para

$$2 - e^{2x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{2x^2} = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\log 2}{2}}.$$

Como $-\sqrt{\frac{\log 2}{2}} < x_0 = 0 < \sqrt{\frac{\log 2}{2}}$, então o intervalo máximo de solução é $I_{\max} = \left]-\sqrt{\frac{\log 2}{2}}, \sqrt{\frac{\log 2}{2}}\right[$.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (a) Determine e^{At}.

[0,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \qquad , \qquad \mathbf{y}(0) = (0, -1, 1)$$

em que $\mathbf{b}(t) = e^{2t}(2, 0, 0)$.

Resolução:

(a) A matriz A é dada por

$$A = 2I + N,$$

onde I é a matriz identidade e

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $(2I)N = N(2I)$ então

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2It}e^{Nt} = e^{2t}Ie^{Nt} = e^{2t}e^{Nt}.$$

Podemos facilmente verificar que N é uma matriz nilpotente. De facto:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad N^3 = 0,$$

pelo que $N^k = 0$ para qualquer $k \geq 3$. Desta forma,

$$e^{Nt} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-As}\,\mathbf{b}(s)\,ds\right) \\ &= e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-2s}\begin{bmatrix} 1 & -2s & s^2 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2s}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} t^2 \\ t-1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Considere

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0 \tag{1}$$

[1,0 val.] (a) Verifique que e^{-3t} é solução da equação diferencial e determine a sua solução geral.

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 8 - 12t \tag{2}$$

[1,0 val.] (c) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = \delta(t-1) \quad , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Resolução:

(a) A função $y_1(t) = e^{-3t}$ é de classe C^3 em $\mathbb{R}$, sendo que $y_1'(t) = -3e^{-3t}$, $y_1''(t) = 9e^{-3t}$ e $y_1'''(t) = -27e^{-3t}$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Então:

$$y_1'''(t) + 3y_1''(t) - 4y_1'(t) - 12y_1(t) = -27e^{-3t} + 27e^{-3t} + 12e^{-3t} - 12e^{-3t} = 0$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$.
Tendo em conta que $y_1(t) = e^{-3t}$ é solução da equação (1), então $R = -3$ é raíz do polinómio característico da equação diferencial, $P(R) = R^3 + 3R^2 - 4R - 12$. Dividindo $P(R)$ pelo monómio $R + 3$, obtém-se a factorização:

$$P(R) = (R+3)(R^2 - 4) = (R+3)(R-2)(R+2)$$

Assim, a solução geral da equação (1) é:

$$y_G(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

(b) O aniquilador de $b(t) = 8 - 12t$ é $P_A(D) = D^2$; logo, uma solução do problema de valor inicial terá que ser solução da equação homogénea

$$D^2(D+3)(D-2)(D+2)y = 0$$

e, portanto,

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + c_4 + c_5 t = y_G(t) + c_4 + c_5 t$$

para certos $c_i \in \mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação (2) da forma $y_p(t) = c_4 + c_5 t$. Substituindo esta expressão na equação (2), obtemos

$$-4c_5 - 12(c_4 + c_5 t) = 8 - 12t, \qquad \text{para qualquer } \ t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} -4c_5 - 12c_4 = 8 \\ -12c_5 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = -1 \\ c_5 = 1 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -1 + t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (2) é

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} - 1 + t$$

(c) Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial, obtemos:

$$-y''(0)-sy'(0)-s^2y(0)+s^3Y(s)+3\big(-y'(0)-sy(0)+s^2Y(s)\big)-4\big(-y(0)+sY(s)\big)-12Y(s)=e^{-s},$$

onde $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Tendo em conta que as condições iniciais são nulas, então a equação anterior é equivalente a

$$(s^3+3s^2-4s-12)Y(s)=e^{-s} \;\Leftrightarrow\; (s+3)(s-2)(s+2)Y(s)=e^{-s}.$$

Aqui, usámos a factorização do polinómio característico, obtida na alínea (a). Então, e procedendo à decomposição em fracções simples:

$$Y(s)=e^{-s}\frac{1}{(s+3)(s-2)(s+2)}=e^{-s}\left(\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+2}\right),$$

onde

$$A(s-2)(s+2)+B(s+3)(s+2)+C(s+3)(s-2)=1$$

para qualquer s no domínio de $Y(s)$. Em consequência, $A=\frac{1}{5}$, $B=\frac{1}{20}$ e $C=-\frac{1}{4}$, pelo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= e^{-s}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{s+3}+\frac{1}{20}\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}\right)=e^{-s}\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t}}{5}+\frac{e^{2t}}{20}-\frac{e^{-2t}}{4}\right\}(s)\\ &= \mathcal{L}\left\{H(t-1)\left(\tfrac{1}{5}e^{-3(t-1)}+\tfrac{1}{20}e^{2(t-1)}-\tfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right)\right\}(s),\end{aligned}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t)=H(t-1)\left(\tfrac{1}{5}e^{-3(t-1)}+\tfrac{1}{20}e^{2(t-1)}-\tfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right)$$

[1,0 val.] 4. Considere a função f definida no intervalo $[-2\pi,2\pi]$ por

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{se} \quad x\in[-\pi,\pi]\\ 0 & \text{se} \quad x\in[-2\pi,-\pi[\cup]\pi,2\pi]\end{cases}$$

Determine a série de Fourier de f em $[-2\pi,2\pi]$ e indique a sua soma para cada $x\in[-2\pi,2\pi]$.

Resolução: Como f é uma função ímpar e $L=2\pi$, a série de Fourier de f é a série de senos,

$$SFf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\frac{nx}{2},$$

onde

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx$$

Tendo em conta que $f(x)$ é nula no intervalo $]\pi,2\pi]$, então:

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2x}{n}\cos\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi}\right)\\ &= \frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

Assim:

$$SFf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{nx}{2},$$

A função f é seccionalmente de classe C^1, tendo descontinuidades em $x = \pm\pi$. Nos extremos do intervalo, $\pm 2\pi$, a função é contínua e $f(2\pi) = f(-2\pi)$. Pelo teorema da convengência pontual das séries de Fourier:

$$SFf(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi[\cup]\pi, 2\pi] \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = -\pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = \pi \end{cases}$$

[1,5 val.] 5. Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{para} \quad x \in]0, \pi[\ ,\ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{2013} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & \text{para} \quad x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{3}$$

Resolução: Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(t,x) = X(x)T(t)$ para a a equação diferencial parcial e condições auxiliares homogéneas. Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T''(t) - 4X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0. \\ T''(t) = 4T(t) \end{cases}$$

Das condições de fronteira homogéneas, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$, resulta, para as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$, que

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

e

$$T'(0)X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0) = 0.$$

Resolvemos, em primeiro lugar, o problema de valores próprios (para $x \in [0,\pi]$):

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X(0) = X(\pi) = 0. \tag{4}$$

O polinómio característico da equação diferencial, $P(R) = R^2 - \lambda$, tem raízes $R = \pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a expressão para as soluções da equação (4) dependem do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\omega x + C \operatorname{sen}\omega x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais e $\omega = \sqrt{|\lambda|} \Leftrightarrow \lambda = -\omega^2$ (com $\omega > 0$).

Impondo as condições de fronteira às soluções, $X(x)$, acima determinadas, temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -B \\ B(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$ resulta que $A = B = 0$.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos\omega\pi + C\,\mathrm{sen}\,\omega\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \omega = n \end{cases}$$

donde obtemos as soluções $X(x) = B\,\mathrm{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \ldots$ (correspondentes a $\omega = n$ e $\lambda = -n^2$).

Em consequência, a solução do problema de valores próprios é:

$$\lambda_n = -n^2 \qquad , \qquad X_n(x) = \mathrm{sen}(nx) \qquad , \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T e juntando a condição inicial já obtida, obtém-se:

$$T'' + 4n^2\lambda T = 0 \qquad ; \qquad T'(0) = 0.$$

A equação é de segunda ordem, linear e de coeficientes constantes. O seu polinómio característico, $Q(R) = R^2 + 4n^2$, tem raízes $R = \pm 2n\mathrm{i}$. Logo, as soluções são da forma

$$T(t) = D\cos(2nt) + E\,\mathrm{sen}(2nt)$$

Como $T'(t) = -2D\,\mathrm{sen}(2nt) + 2E\cos(2nt)$, então $T'(0) = 0$ implica que $E = 0$. Assim, podemos tomar $T_n(t) = \cos(2nt)$.

As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira e a condição inicial homogénea são (a menos de produto por uma constante) funções da forma:

$$\cos(2nt)\,\mathrm{sen}(nx) \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Procuramos agora uma solução formal do problema (3) que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; ou seja:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2nt)\,\mathrm{sen}(nx)$$

Substituindo esta expressão na condição inicial não homogénea, $u(x,0) = \sum_{n=1}^{2013} \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(nx)$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{2013} \frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(nx)$$

pelo que:

$$A_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{se} \quad n \leq 2013 \\ 0 & \text{se} \quad n > 2013 \end{cases}$$

Assim sendo, a solução de (3) é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{2013} \frac{2}{n} \cos(2nt)\,\mathrm{sen}(nx)$$

.

[1,5 val.] 6. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y(2-y)e^y + g(t,y) \quad , \quad y(0) = 1 \tag{5}$$

sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no seu domínio e tal que $g(t,y) = 0$ no conjunto $\{(t,y) \ : \ 0 \leq y \leq 2\}$. Mostre que o (PVI) tem solução única definida em $\mathbb{R}$ e determine o seu limite quando $t \to +\infty$.

Resolução: Seja $f(t,y) = y(2-y)e^y + g(t,y)$; esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, o que implica que é contínua e localmente lipshitziana em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, o problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \ , \qquad y(t_0) = y_0 \ , \tag{6}$$

para *qualquer* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tem solução *única*, de classe C^1, definida numa vizinhança de t_0.

Como $f(t,0) = g(t,0) = 0$ e $f(t,2) = g(t,2) = 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, então as funções constantes $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$ são soluções da equação diferencial. Além disso, o ponto inicial verifica $y(0) = 1 \in \,]0,2[$. Desta forma, o gráfico da solução da equação diferencial que satisfaz $y(0) = 1$ não pode intersectar (os gráficos de) $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$; caso contrário, se tomássemos um tal ponto de intersecção como condição inicial do PVI (6) então existiriam duas soluções distintas do mesmo problema, o que iria contradizer o teorema de Picard.

Assim, a solução única de (5) satisfaz

$$0 < y(t) < 2 \qquad \forall t \in I_{max} \ ; \tag{7}$$

isto mostra que $y(t)$ não explode em tempo finito. Dado que o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, então, pelo teorema de extensão de solução, $y(t)$ está definida em $I_{max} = \mathbb{R}$.

Consideremos $t \in \mathbb{R}$. Tendo em conta que a solução do PVI (5) satisfaz (7), então:

$$f\big(t, y(t)\big) = y(t)\big(2 - y(t)\big)e^{y(t)}.$$

Como $y(2-y) > 0$ para $0 < y < 2$, então $f(t, y(t)) > 0$. Assim, $y'(t) > 0$, pelo que $y(t)$ é crescente; em particular, $1 = y(0) < y(t) < 2$ para qualquer $t > 0$. Como $y(t)$ é crescente e limitada no seu domínio, então existe $c = \lim_{t\to+\infty} y(t)$, sendo que c verifica $1 \leq c \leq 2$. Consequentemente, $y = c$ é uma assimptota horizontal ao gráfico da solução; como $y(t)$ é de classe C^1, então $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$. Tomando o limite, quando $t \to +\infty$, em ambos os membros da equação $y'(t) = y(t)\big(2 - y(t)\big)e^{y(t)}$, obtemos

$$0 = c(2-c)e^c,$$

pelo que $c = 0$ ou $c = 2$. Mas como $c \in [1,2]$, resulta então que:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = c = 2.$$