TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2013/2014

2º Teste

(Curso: MEAer)

21 de Dezembro de 2013, 9h

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x - 4y^2x + \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(0) = \frac{3}{2}$$

e indique o intervalo máximo de existência da solução.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (a) Determine e^{At}.

[0,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{y}(0) = (0, -1, 1)$$

em que $\mathbf{b}(t) = e^{2t}(2, 0, 0)$.

3. Considere

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$$

[1,0 val.] (a) Verifique que e^{-3t} é solução da equação diferencial e determine a sua solução geral.

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 8 - 12t$$

[1,0 val.] (c) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$y''' + 3y'' - 4y' - 12y = \delta(t-1) \quad , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

[1,0 val.] 4. Considere a função f definida no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi[\cup]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Determine a série de Fourier de f em $[-2\pi, 2\pi]$ e indique a sua soma para cada $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

[1,5 val.] 5. Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{para} \quad x \in]0, \pi[\ , \ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{2013} \frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx) \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & \text{para} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$

[1,5 val.] 6. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y(2-y)e^y + g(t,y) \quad , \quad y(0) = 1$$

sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no seu domínio e tal que $g(t,y) = 0$ no conjunto $\{(t,y) \ : \ 0 \leq y \leq 2\}$. Mostre que o (PVI) tem solução única definida em $\mathbb{R}$ e determine o seu limite quando $t \to +\infty$.