

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2018/2019

2º Teste — Versão B

(CURSOS: MEQ, MEAMBI, MEEC, MEMEC, LEAN, MEM, MEC)
15 de Dezembro de 2018, 11h — 12h30

[1,5 val]

1. Calcule a solução do problema de valor inicial

$$(4t - 2) + (y - 2)y' = 0, \quad y(0) = 0,$$

na forma explícita, indicando o intervalo máximo de existência de solução.

2. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val]

- (a) Determine e^{At} .

[1,0 val]

- (b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[0,5 val]

- (c) Sendo $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma solução arbitrária de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}(t)$.

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 2y'' - 3y' = b(t),$$

onde $b(t)$ é uma função real, definida e contínua em \mathbb{R} .

[0,5 val]

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,0 val]

- (b) Sendo $b(t) = -6 - 6e^{2t}$, determine a solução da equação diferencial que verifica:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 4.$$

[0,5 val]

- (c) Escreva a equação diferencial na forma de uma equação vectorial linear de 1ª ordem e indique uma matriz solução fundamental para a mesma.

[1,0 val]

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

e determine a soma da série, para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val]

- (b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4t^3 u & 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

[1,0 val]

5. Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em \mathbb{R} , considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Mostre que para qualquer $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ este problema admite uma única solução local e determine o seu intervalo máximo de existência de solução.