DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020 — 14/12/2019

Teste 2 - Versão A

(CURSOS: MEAER, MEAMBI, MEEC, MEQ)

1. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial na forma explícita. Para ambos os problemas, indique os intervalos máximos de existência de solução.

[1,0 val.] (a) $e^{-2t}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2x}, \quad x(0) = -1.$

[1,0 val.] (b) $2ty + y^2 + \left(t^2 + 2ty\right)\dfrac{dy}{dt} = 0, \quad y(1) = 2.$

2. Sendo

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (a) Verifique que

$$e^{At} = \frac{1}{2}e^{-2t}\begin{bmatrix} 2+t & -t \\ t & 2-t \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(0) = (2, -2),$$

onde $\mathbf{b}(t) = \left(e^{-2t}, e^{-2t}\right)$.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + y' - 6y = h(x),$$

onde h é uma função real definida e contínua em $\mathbb{R}$.

(a) Para $h(x) = 0$, determine:

[0,5 val.] (i) a solução geral da equação;

[0,5 val.] (ii) o valor das constantes α e β não simultaneamente nulas, de forma a solução da equação que verifica $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ seja limitada em $\mathbb{R}^+$.

[1,5 val.] (b) Para $h(x) = 10e^{2x}$, determine a solução da equação que verifica $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

[1,0 val.] 4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = \frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Estude a convergência pontual da série em $[-\pi, \pi]$.

[1,5 val.] (b) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9t^2 u, & x \in \,]0, \pi[\,, \quad t > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = f(x) & x \in \,[0, \pi]\,. \end{cases}$$

[1,0 val.] 5. Com $n \in \mathbb{N}$, seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável de entradas reais tal que a parte real de qualquer um dos seus valores próprios é negativa. Prove que qualquer solução de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ verifica

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0};$$

mostre também que se $\alpha < 0$ é a maior das partes reais dos valores próprios de A então $e^{-\alpha t}\mathbf{y}(t)$ é uma função limitada em $[0, +\infty[$.