DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

2º Teste — Versão A

(Cursos: MEQ, MEAmbi, MEEC, MEMec, LEAN, MEM, MEC)

15 de Dezembro de 2018, 11h — 12h30

[1,5 val] 1. Calcule a solução do problema de valor inicial

$$(2t+3)+(2y-2)y'=0, \qquad y(0)=0,$$

na forma explicita, indicando o intervalo máximo de existência de solução.

2. Considere a matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val] (a) Determine e^{At}.

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[0,5 val] (c) Sendo $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ uma solução arbitrária de $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$, determine $\lim\limits_{t\to-\infty}\mathbf{y}(t)$.

3. Considere a equação diferencial

$$y'''+y''-2y'=b(t),$$

onde $b(t)$ é uma função real, definida e contínua em $\mathbb{R}$.

[0,5 val] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,0 val] (b) Sendo $b(t)=4+8e^{2t}$, determine a solução da equação diferencial que verifica:

$$y(0)=0\,, \qquad y'(0)=0\,, \qquad y''(0)=4\,.$$

[0,5 val] (c) Escreva a equação diferencial na forma de uma equação vectorial linear de 1ª ordem e indique uma matriz solução fundamental para a mesma.

[1,0 val] 4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} -4 & \text{se} \quad 0\le x<\pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$$

e determine a soma da série, para cada $x\in\mathbb{R}$.

[1,5 val] (b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6t^5u & 0<x<2\pi \;\;,\;\; t>0 \\ u(t,0)=u(t,2\pi)=0 & t\ge 0 \\ u(0,x)=f(x) & 0\le x\le 2\pi \end{cases}$$

[1,0 val] 5. Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)} \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

Mostre que para qualquer $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$ este problema admite uma única solução local e determine o seu intervalo máximo de existência de solução.