TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Teste 2 — versão A

28 de Maio de 2016, às 9:00

Cursos: MEAer, MEBiom, LEAN, LMAC, MEFT, MEMec

Solução

1,0 val 1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} y = 2\cos t, \qquad y(\pi/2) = -1;$$

indicando o intervalo máximo de definição.

Solução

A equação é linear e a função $\operatorname{sen} t$ é um factor integrante. De facto, multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\operatorname{sen} t$

$$\operatorname{sen} t \cdot \frac{dy}{dt} + (\cos t) \cdot y = 2(\operatorname{sen} t) \cdot (\cos t)$$
$$\frac{d}{dt}(y \cdot \operatorname{sen} t) = 2(\operatorname{sen} t) \cdot (\cos t),$$

e integrando entre $\pi/2$ e t, obtém-se:

$$y(t) \cdot \operatorname{sen} t - y(\pi/2) \cdot \operatorname{sen}(\pi/2) = \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^2(\pi/2)$$
$$y(t) = \operatorname{sen} t - 2/\operatorname{sen} t,$$

O intervalo máximo da definição é $I_{\max} =]0, \pi[$.

1,0 val (b) Determine a solução geral da equação

$$4ty + (2t^2 + 2y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

e indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial é única e $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Solução

A equação é exacta em $\mathbb{R}^2$. De facto, para $\phi(t,y) = 2t^2y + y^2$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 4ty \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2t^2 + 2y.$$

Logo $2t^2y + y^2 = K$, com $K \in \mathbb{R}$, é a solução geral (na forma implícita) da equação. Pela condição inicial $y(0) = y_0$, $K = y_0^2$; explicitando a solução, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= -t^2 + \sqrt{t^4 + y_0^2} \qquad \text{para } y_0 > 0, \qquad e \\ y &= -t^2 - \sqrt{t^4 + y_0^2} \qquad \text{para } y_0 < 0, \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Picard ao problema de valor inicial (com $y_0 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2ty}{t^2 + y} \qquad y(0) = y_0,$$

concluimos que a solução obtida é única. Além disso, quando $y_0 > 0$ tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} -t^2 + \sqrt{t^4 + y_0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \sqrt{1 + x^4 y_0^2}}{x^2} = 0$$

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

1,0 val (a) Resolva o problema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$.

Solução

Os valores próprios da matriz A são 1 e -1, e $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ são vectores próprios associados (respectivamente). Portanto a solução geral de equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é

$$\mathbf{y} = ae^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

A solução do problema é

$$\mathbf{y} = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

1,0 val (b) Determine uma solução particular da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ em que $\mathbf{b}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e^t \end{smallmatrix}\right]$.

Solução

Usando a solução geral em (1), obtém-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ 5e^{-t} & e^{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{5}{2}(e^{-t} - e^{t}) & e^{t} \end{bmatrix}$$
$$e^{-At} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 \\ 5e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Uma solução particular é dada por

$$\mathbf{y} = e^{At} \int e^{-At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \end{bmatrix} dt = e^{At} \int \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^{t} & 0 \\ 5e^{t} & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \end{bmatrix} dt = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Segue que $te^{t}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ é uma solução particular.

3. Considere o problema de valor inicial

$$y''' + y'' - 2y = 5e^{t}; \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$$

1,0 val (a) Resolva a equação homogénea associada.

Solução

Usando o operador $D = \frac{d}{dt}$ obtém-se

$$\big(D - 1\big)\big((D+1)^2 + 1\big)y = \big(D^3 + D^2 - 2\big)y = 0.$$

Portanto a solução geral da equação homogénea é

$$y = ae^{t} + e^{-t}(b\cos t + c\,\mathrm{sen}\, t). \tag{2}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1,0 val (b) Determine a solução geral da equação.

Solução

Usando coeficientes indeterminados e notando que $(D-1)e^t = 0$, temos uma solução particular de forma $A \cdot te^t$. Aplicando o operador $\big((D+1)^2+1\big)\big(D-1\big)$ à função $A \cdot te^t$ obtem-se

$$\begin{aligned}\big((D+1)^2+1\big)\big(D-1\big)(Ate^t) &= A\big((D+1)^2+1\big)(e^t)\\ &= A \cdot \big((1+1)^2+1\big)(e^t)\\ &= 5A \cdot e^t.\end{aligned}$$

Segue que te^t é uma solução de $y''' + y'' - 2y = 5e^t$, e portanto a solução geral da equação é

$$(t+a)e^t + e^{-t}(b\cos t + c\,\mathrm{sen}\, t).$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1,0 val (c) Justifique que a solução do problema de valor inicial é $y(t) = (t-1)e^t$.

Solução

A solução geral é de forma $(t+a)e^t + e^{-t}(b\cos t + c\,\mathrm{sen}\, t)$, portanto a função $(t-1)e^t$ é uma solução. Para $y(t) = (t-1)e^t$ tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= (t-1)e^t & y(0) &= -1\\ y'(t) &= e^t + (t-1)e^t & y'(0) &= 0\\ y''(t) &= 2e^t + (t-1)e^t & y''(0) &= 1.\end{aligned}$$

Logo $(t-1)e^t$ é a solução do problema de valor inicial.

1,0 val

4. Determine a série Fourier da função $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\pi-|x|=\begin{cases}\pi+x & \text{se } -\pi\le x<0\\ \pi-x & \text{se } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

e estude-a quando à convergência pontual em $[-\pi,\pi]$.

Solução

A função $f(x)$ é par, e portanto a série de Fourier é da forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

Tem-se

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\pi$$

e para $n>0$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-x}{n}\operatorname{sen}nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}\,dx\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

Obtém-se que

$$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

é a série de Fourier de f. Como f é de classe $\mathcal{C}^1$ seccionalmente e $f(\pm\pi)=0$, segue que a série converge uniformemente para f no intervalo $[-\pi,\pi]$ e é periódica com período 2π.

1,0 val 5. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 2 + \cos(10x) - \cos(20x) \end{cases}$$

Solução

Escrevendo $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} T'X &= TX'' - 2tTX \\ \frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} - 2t \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T'}{T} + 2t = \lambda \end{aligned}$$

A partir das condições de fronteira obtém-se $X'(0) = 0 = X'(\pi)$. Resulta assim um problema de valores próprios

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ X'(0) = X'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \quad X_0(x) = 1 \quad e \\ \lambda_n &= -n^2, \quad X_n(x) = \cos nx, \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por outro lado, as soluções da equação diferencial

$$T' = (\lambda - 2t)T,$$

para os valores de λ acima determinados, são $T_n(t) = e^{-(n^2 t + t^2)}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$. Logo, as funções

$$a_0 e^{-t^2} \quad \text{e} \quad a_n e^{-n^2 t - t^2} \cos nx, \text{ com } n = 1, 2, \ldots$$

verificam o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a condição inicial $u(0,x) = 2 + \cos(10x) - \cos(20x)$, resulta a solução:

$$u(t,x) = \left(2 + e^{-100t}\cos(10x) - e^{-400t}\cos(20x)\right) e^{-t^2}$$

1,0 val

6. Mostre que se A e B são duas matrizes $n \times n$ de componentes constantes tais que

$$AB = BA$$

então $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$.

Solução

Sendo $X(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$, então $X(0) = I^2 = I$. Por outro lado, e tendo em conta que $AB = BA$ implica que

$$e^{At}B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} BA^n = Be^{At}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \left(e^{At}\right)' e^{Bt} + e^{At}\left(e^{Bt}\right)' \\ &= Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} \\ &= Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)X(t) \end{aligned}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se então que $X(t) = e^{(A+B)t}$.