TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2015/2016

Teste 2, versão A
Cursos: MEAer, MEBiom, LEAN, LMAC, MEFT, MEMec
28 de Maio de 2016, às 9:00

1,0 val 1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} y = 2\cos t, \qquad y(\pi/2) = -1;$$

indicando o intervalo máximo de definição.

1,0 val (b) Determine a solução geral da equação

$$4ty + (2t^2 + 2y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

e indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial é única e $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

1,0 val (a) Resolva o problema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$.

1,0 val (b) Determine uma solução particular da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ em que $\mathbf{b}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e^t \end{smallmatrix}\right]$.

3. Considere o problema de valor inicial

$$y''' + y'' - 2y = 5e^t; \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$$

1,0 val (a) Resolva a equação homogénea associada.

1,0 val (b) Determine a solução geral da equação.

1,0 val (c) Justifique que a solução do problema de valor inicial e $y(t) = (t-1)e^t$.

1,0 val 4. Determine a série Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \pi - |x| = \begin{cases} \pi + x & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x & \text{se } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

e estude-a quando à convergência pontual em $[-\pi, \pi]$.

1,0 val 5. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = 2 + \cos(10x) - \cos(20x) \end{cases}$$

1,0 val 6. Mostre que se A e B são duas matrizes $n \times n$ de componentes constantes tais que

$$AB = BA$$

então $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$.