Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

2º Teste — Versão A

(CURSO: LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEEC, MEQ)

19 de Dezembro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^3} \quad ; \quad y(1) = 1$$

indicando o intervalo máximo de definição.

(1,0 val.) (b) Determine a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t$$

Indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial explode.

Resolução:

(a) Trata-se de uma equação linear. O factor integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = t$$

Assim

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(ty\Big)' = \frac{1}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t} \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Sendo $y(1) = 1$, conclui-se que $C = 2$ e assim a solução do (PVI) é

$$y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} \; .$$

O intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} =]0, \infty[$ — o maior intervalo contido no domínio de y' que contém $t_0 = 1$.

(b) Começamos por observar que $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação. No caso geral, trata-se de uma equação separável. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y(1+y)} dy = \int 2t dt \\
&\Leftrightarrow \quad \int \Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\Big) dy \int 2t dt \\
&\Leftrightarrow \quad \log\left|\frac{y}{y+1}\right| = t^2 + c
\end{aligned}$$

Conclui-se que a solução geral da equação é

$$y(t) = \frac{e^{t^2}k}{1 - e^{t^2}k}$$

se para todo $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) \neq 0$ e $y(t) \neq -1$, $y(t) \equiv 0$ se para algum $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) = 0$, $y(t) \equiv -1$ se para algum $t \in \mathbb{R}$ se tem que $y(t) = -1$. Teremos agora que indicar $y_0 \in \mathbb{R}$, para o qual a solução do (PVI)

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t \quad , \quad y(0) = y_0$$

tenha um blow-up. Dado que as soluções constantes não explodem podemos concluir de imediato que $y_0 \neq 0$ e $y_0 \neq -1$. A solução dada por $\frac{e^{t^2}k}{1-e^{t^2}k}$ explode se para algum valor de t e de k a expressão $1 - e^{t^2}k$ se anula. Teremos então que k terá de ser positivo (pois se $k \leq 0$ a solução do (PVI) não explode). Para qualquer valor de $k \in]0, 1[$ a solução explode em $t = \pm\sqrt{-\log k}$. Por exemplo, escolhendo $k = e^{-1}$, a solução é $y(t) = \frac{e^{t^2-1}}{1-e^{t^2-1}} = \frac{1}{e^{1-t^2}-1}$ e a condição inicial pedida é $y(0) = \frac{1}{e-1}$.

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine e^{At}, e resolva o problema $Y' = AY$, $Y(0) = (1\,,\,-1)$.

(b) Determine uma solução particular da equação $Y' = AY + B(t)$ em que $B(t) = (0, e^{-t})$.

Resolução:

(a) A matriz A é triangular pelo que os seus valores próprios são -1 e 2. Podemos desde já concluir que A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz não singular, S, tal que

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

As colunas de S são os vectores próprios associados a -1 e 2 respectivamente. Assim, a primeira coluna de S será uma solução de

$$(A+I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -3v_1 + 3v_2 = 0$$

Por outro lado, a segunda coluna de S será uma solução de

$$(A-2I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então (por exemplo)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

A solução de $Y' = AY$, $Y(0) = (1\,,\,-1)$ é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

(b) Uma solução particular de $Y' = AY + B(t)$ será dada por (usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} Y_P(t) &= e^{At}\int e^{-At}B(t)dt \;=\; e^{At}\int \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ e^{t} - e^{\cdot 2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{At}\int \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{e^{-t}}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 7y' + 6y = h(t) \ \ .$$

(a) Considerando $h(t) \equiv 0$, determine a solução geral da equação. Indique, justificando, a forma das soluções limitadas em $[0, \infty[$. Existem soluções limitadas em $\mathbb{R}$?

(b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, escolhendo para $h(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções:

$$h(t) = 20\delta(t-2) \qquad \textbf{ou} \qquad h(t) = 16e^{t}$$

onde $\delta(t-2)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em 2.

Resolução:

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0$$

Tem-se então que o polinómio característico é

$$P(R) = R^3 - 7R + 6 = (R-1)(R-2)(R+3)$$

Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = ae^{t} + be^{2t} + ce^{-3t} \ \ , \ \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

A forma das soluções limitadas em $\mathbb{R}^{+}$ é ce^{-3t} ou seja as soluções correspondentes a $a = b = 0$. A única solução limitada em $\mathbb{R}$ é a solução nula.

(b1) Sendo $h(t) = 20\delta(t-2)$, vamos usar a transformada de Laplace para resolver o (PVI). Assim,

$$
\begin{aligned}
& y''' - 7y' + 6y = 20\delta(t-2) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y''' - 7y' + 6y\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{20\delta(t-2)\Big\}(s) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y'''\Big\}(s) - 7\mathcal{L}\Big\{y'\Big\}(s) + 6\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = 20e^{-2s} \\
\Leftrightarrow\ & -y''(0) - sy'(0) - s^2y(0) + s^3\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) - 7(-y(0) + s\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s)) + 6\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = 20e^{-2s} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{20e^{-2s}}{s^3 - 7s + 6} = \frac{20e^{-2s}}{(s-1)(s-2)(s+3)}
\end{aligned}
$$

Visto

$$
\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-1/4}{s-1} + \frac{1/5}{s-2} + \frac{1/20}{s+3}
$$

tem-se que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{20e^{-2s}}{s^3 - 7s + 6} = \frac{20e^{-2s}}{(s-1)(s-2)(s+3)} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = e^{-2s}\Big(\frac{-5}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{1}{s+3}\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = e^{-2s}\mathcal{L}\Big\{-5e^t + 4e^{2t} + e^{-3t}\Big\}s) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{H(t-2)\Big(-5e^{t-2} + 4e^{2(t-2)} + e^{-3(t-2)}\Big)\Big\}(s)
\end{aligned}
$$

onde $H(t-2)$ representa a função de Heaviside centrada em 2. Conclui-se que a solução do (PVI) é

$$
H(t-2)\Big(-5e^{t-2} + 4e^{2(t-2)} + e^{-3(t-2)}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t < 2 \\ -5e^{t-2} + 4e^{2(t-2)} + e^{-3(t-2)} & \text{se} \quad t \ge 2 \end{cases} .
$$

(b2) Sendo $h(t) = 16e^t$ vamos tambem usar a transformada de Laplace para resolver o (PVI). Assim,

$$
\begin{aligned}
& y''' - 7y' + 6y = 16e^t \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y''' - 7y' + 6y\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{16e^t\Big\}(s) \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y'''\Big\}(s) - 7\mathcal{L}\Big\{y'\Big\}(s) + 6\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{16}{s-1} \\
\Leftrightarrow\ & -y''(0) - sy'(0) - s^2y(0) + s^3\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) - 7(-y(0) + s\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s)) + 6\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{16}{s-1} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{16}{(s-1)(s^3 - 7s + 6)} = \frac{16}{(s-1)^2(s-2)(s+3)}
\end{aligned}
$$

Visto

$$
\frac{16}{(s-1)^2(s-2)(s+3)} = \frac{-3}{s-1} + \frac{-4}{(s-1)^2} + \frac{16/5}{s-2} + \frac{-1/5}{s+3}
$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \frac{-3}{s-1} + \frac{-4}{(s-1)^2} + \frac{16/5}{s-2} + \frac{-1/5}{s+3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\Big\{y\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{-3e^t - 4te^t + \frac{16}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}\Big\}(s)$$

Conclui-se que a solução do (PVI) é

$$y(t) = -3e^t - 4te^t + \frac{16}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

4. Considere a função f definida no intervalo $[-4, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -4 \leq x \leq -2 \quad \text{ou} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \end{cases} .$$

Calcule a sua série de Fourier e indique a soma da série no intervalo $[-4, 4]$.

Resolução:

Sendo $L = 4$, a série de Fourier é da forma

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{4} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{4}\Big)$$

Os coeficientes da série são dados por (observe que f é uma função par)

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{4}\cos\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{4}\Big|_2^4 = -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Sendo f uma função par, tem-se que para qualquer $n \in N$

$$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{4}dx = 0.$$

Conclui-se que a série de Fourier associada a f é

$$SF_f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{4}$$

Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -4 \leq x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = -2 \\ 0 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 2 \\ 1 & \text{se} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

5. Considere o problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x & , \quad t > 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ u(t,0) = 0 \ , \ u(t,\pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(0,x) = -x^3 + \pi^2 x + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{1}$$

(a) Determine uma solução estacionária, isto é da forma $u(t,x) = v(x)$, da equação diferencial que verifique $v(0) = 0$ e $v(\pi) = 0$.

(b) Determine uma solução de (1)

Resolução:

(a) Queremos determinar uma solução estacionária do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x & , \quad t > 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ u(t,0) = 0 \ , \ u(t,\pi) = 0 & , \quad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Substituindo $u(t,x)$ por $v(x)$ na equação diferencial, obtém-se:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow v''(x) = -6x$$

Primitivando duas vezes, resulta então que:

$$v(x) = -x^3 + ax + b \qquad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Como $v(0) = v(\pi) = 0$, então $b = 0$ e $-\pi^3 + a\pi = 0 \Rightarrow a = \pi^2$. Assim:

$$v(x) = -x^3 + \pi^2 x$$

(b) Note que devido à presença do termo $6x$ a equação diferencial **não é homogénea**. Em consequência, e apesar de as condições de fronteira serem homogéneas, o princípio da sobreposição não é aplicável a soluções de (2) e, assim sendo, o método de separação de variáveis não é directamente aplicável.

Vamos, por isso, procurar soluções do problema (1) da forma

$$u(t,x) = w(t,x) + v(x)$$

onde $v(x)$ é a solução estacionária determinada em (a) (que é uma solução particular de (2)). Tendo em conta que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} + 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial w^2} + \underbrace{v''(x) + 6x}_{=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

e usando as condições fronteira e iniciais para u e v, então w é a solução do problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & , \quad t > 0 \ , \ 0 < x < \pi \\ w(t,0) = 0 \ , \ w(t,\pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ w(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{3}$$

Vamos procurar soluções não nulas da forma $w(x,t) = X(x)T(t)$ para a equação diferencial parcial e condições de fronteira (que são homogéneas). Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade, válida para qualquer $t > 0$ e $0 < x < \pi$, é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & \text{para } \ 0 < x < \pi \\ T'(t) = \lambda T(t) & \text{para } \ t > 0 \end{cases}$$

onde λ é um número real.

Das condições de fronteira, $w(t,0) = w(t,\pi) = 0$, resulta que as soluções não nulas da equação diferencial parcial da forma $T(t)X(x)$ devem verificar

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o problema de valores próprios (para $x \in [0,\pi]$),

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{4}$$

obtém-se

$$\lambda_n = -n^2 \qquad , \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \qquad , \quad \text{com } \ n = 1,2,3,\ldots$$

Substituindo os valores de λ — para os quais se obteve soluções não nulas de (4) — na equação para T, obtém-se:

$$T' = -n^2 T \qquad ; \qquad \text{com } \ n = 0,1,2,3,\ldots$$

A solução geral desta equação é $T(t) = De^{-n^2 t}$; para cada $n = 0,1,2,3,\ldots$ podemos, a menos de combinação linear, tomar

$$T_n(t) = e^{-n^2 t}.$$

As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos de produto por uma constante) funções da forma:

$$w_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx) \quad , \quad \text{com } \ n = 1,2,3,\ldots$$

Procuramos agora uma solução formal do problema (2) que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; isto é:

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$$

Utilizando a condição inicial do problema (2),

$$w(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen}\big((2k+1)x\big),$$

resulta que:

$$\begin{array}{lll} A_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} & \text{para} & k \in \{1,2,3,4,5\} \\ A_n = 0 & \text{para} & n \notin \{3,5,7,9,11\} \end{array}$$

Assim sendo, a solução de (1) é:

$$u(x,t) = v(x) + w(t,x) = -x^3 + \pi^2 x + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}\big((2k+1)x\big)$$

6. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, limitada em $\mathbb{R}$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t+y) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \tag{5}$$

em que α é uma constante real positiva. Mostre que o problema tem solução única e que o seu intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$. Se adicionalmente se tiver que $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi(r)$ existe e é positivo, calcule justificando o $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$, onde y representa a solução do problema.

Resolução:

Seja $f(t,y) = -y\varphi(t+y)$; esta função está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}$, o que implica que é lipschitziana (e contínua) em $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Picard, o problema de valor inicial (5) tem solução única, de classe C^1, definida num intervalo da forma $]a,b[$, com $a < 0 < b$. Pelo teorema de extensão de solução — e dado que a fronteira do domínio de f é o conjunto vazio — ou $b = +\infty$ (respectivamente, $a = -\infty$), ou a solução, $y(t)$, explode quando $t \to b^-$ e $b < +\infty$ (respectivamente, $t \to a^+$ e $a > -\infty$).

Note que $x(t) \equiv 0$ é solução da equação diferencial pelo que, por unicidade de solução, o gráfico da solução $y(t)$ não pode intersectar o eixo $y = 0$. Como $y(0) = \alpha > 0$, então $y(t) > 0$ para qualquer $t \in]a,b[$. Temos também que

$$\frac{y'}{y} = -\varphi(t+y).$$

Como $y(t) > 0$, então

$$\frac{d}{dt}\Big(\log y(t)\Big) = -\varphi(t+y),$$

pelo que (e tendo em conta que $\log y(0) = \log \alpha$) $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$\log y(t) = \log \alpha + \int_0^t -\varphi\big(s + y(s)\big)\, ds$$

então, para qualquer $t \in]a,b[$:

$$|\log y(t) - \log \alpha| \le \int_0^t \underbrace{\big|-\varphi\big(s+y(s)\big)\big|}_{\le M} |ds| \le M \int_0^t |ds| = M|t|$$

Isto mostra que $y(t)$ não explode em tempo finito em ambos os extremos do seu intervalo máximo de solução; concluímos então que $y(t)$ está definida (e é de classe C^1) em $\mathbb{R}$.

Determinemos agora o $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. Como sabemos que $\lim_{r\to+\infty} \varphi(r) = L > 0$, então pela definição de limite existe $R \in \mathbb{R}$ tal que se $r > R$ então $\varphi(r) > \beta \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{2} > 0$. Consideramos agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t+y) \\ y(R) = y_R \end{cases} \tag{6}$$

onde y_1 é o valor da solução de (5) em $t = R$. Por unicidade de solução, as soluções de (5) e (6) são idênticas (e iguais à função $y(t)$). Como anteriormente, o problema (6) é equivalente à equação integral

$$\log y(t) = \log y_R + \int_R^t -\varphi\big(s + y(s)\big)\, ds,$$

pelo que, para qualquer $t \geq R$:

$$\log y(t) = \log y_R + \int_R^t \underbrace{-\varphi\big(\underbrace{s + y(s)}_{>R}\big)}_{<-\beta}\, ds < \log y_R - \beta \int_R^t ds = \log y_R - \beta(t - R)$$

Resulta assim que $\lim_{t\to+\infty} \log y(t) = -\infty$, o que implica que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.