TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEAN, LEGM, LMAC, MEBIOM, MEC, MEFT, MEMEC)

30 de Maio de 2015, 9h

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular e telemóveis.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		2,0	
2)		2,0	
3)		2,0	
4)		1,5	
5)		1,5	
6)		1,0	
Total		10	

Nome: _____

Nº: _____ **Sala:** _____

Curso: _____ **Rubrica (DOCENTE):**

1. Considere a seguinte equação:

$$\big(1+t+\operatorname{sen}(2y)\big)-\cos(2y)\frac{dy}{dt}=0.$$

(1 val) a) Mostre que a equação não é exacta mas admite um factor integrante da forma $\mu=\mu(t)$.

(1 val) b) Determine a solução geral da equação, na forma implícita.

Solução:

a) Sejam $M(t,y)=1+t+\operatorname{sen}(2y)$ e $N(t,y)=-\cos(2y)$. Como $\frac{\partial M}{\partial y}=2\cos(2y)$ e $\frac{\partial N}{\partial t}=0$ a equação não é exacta. Para $\mu(t)$ uma função de t tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\big[(1+t+\operatorname{sen}(2y))\mu(t)\big]&=\frac{\partial}{\partial t}\big[-\cos(2y)\mu(t)\big]\\ 2\cos(2y)\mu(t)&=-\cos(2y)\mu'(t)\\ -2\mu&=\mu'.\end{aligned}$$

Portanto $\mu(t)=e^{-2t}$ é um factor integrante.

b) Usando o factor integrante e^{-2t} obtem-se uma solução geral, na forma implícita,

$$-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(3/2+t+\operatorname{sen}(2y)\right)=C \quad \text{uma constante.}$$

De facto, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-e^{-2t}\cos(2y)\\ \varphi(t,y)&=-\frac{e^{-2t}}{2}\operatorname{sen}(2y)+f(t)\\ e^{-2t}\big(1+t+\operatorname{sen}(2y)\big)&=e^{-2t}\operatorname{sen}(2y)+f'(t)\\ e^{-2t}\big(1+t\big)&=f'(t)\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\frac{3}{2}+t\right)+\ \text{uma constante}\ &=f(t)\end{aligned}$$

2. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}(t) = e^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4t \end{bmatrix}$.

(1 val) a) Determine a solução geral da equação homogenénea associada.

(1 val) b) Determine a solução que verifica a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) O polinómio caractrítico de A é $(\lambda - 1)^2$. Portanto

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^t\big(I + (A - I)t\big) \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segue-se que a solução geral da equação homogénea é

$$ae^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} + be^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Segundo o método de variação das constantes existe uma solução da forma $e^{At} \cdot \mathbf{c}(t)$ em que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= e^{-At} \cdot \mathbf{b}(t) \\ &= e^t\big(I + (A - I)t\big) \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2t & 1 \end{bmatrix} e^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto a solução geral da equação é

$$e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a + t \\ b + t^2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} t \\ 3t^2 \end{bmatrix}.$$

(2 val) 3. Resolva **apenas um** (à sua escolha) dos problemas de valor inicial seguintes:

a) $y'' + 4y = 1 - H_4(t)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, onde $H_4(t) = 0$ para $t < 4$ e $H_4(t) = 1$ para $t \geq 4$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solução:

a) Usando a transformada de Laplace obtem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + 4y\} &= \mathcal{L}\{1 - H_4(t)\} \\
s^2Y(s) - 3s - 2 + 4(Y(s) - 3) &= \frac{1 - e^{-4s}}{s} \\
Y(s) &= \frac{3s + 14}{s^2 + 4} + \frac{1 - e^{-4s}}{s(s^2 + 4)} \\
&= 3\frac{s}{s^2 + 4} + 7\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1 - e^{-4s}}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) \\
y(t) &= 3\cos(2t) + 7\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{1 - \cos(2t)}{4} + H_4(t)\frac{1 - \cos(2(t - 4))}{4}
\end{aligned}$$

b) A solução geral da equação homogénea é $(a+bt)e^{2t}$. Usando o método dos coeficientes indeterminados uma solução particular é de forma ct^2e^{2t}. O coeficiente c satisfaz

$$2c = 10.$$

Portanto a solução geral é

$$y(t) = (a + bt + 5t^2)e^{2t}.$$

Aplicando as condições iniciais obtem-se

$$y(t) = (1 - 2t + 5t^2)e^{2t}.$$

(1,5 val) 4. Considere a função $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\pi \leq x \leq 0 \\ -2x & \text{se} \quad 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Determine a sua série de Fourier e estude-a quanto à convergência pontual em $\mathbb{R}$.

Solução: A série de Fourier de f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx/2) + b_n \operatorname{sen}(nx/2)$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -2x\,dx = -2\pi \\ a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -2x\cos(nx/2)\,dx, \quad n \geq 1 \\ &= -\frac{4}{n^2\pi}\big((-1)^n - 1\big) \\ b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -2x\operatorname{sen}(nx/2)\,dx, \quad n \geq 1 \\ &= (-1)^n\frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Portanto a série de Fourier de f é

$$F(x) = -\pi + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi}\cos(nx/2) + \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx/2).$$

Como f é contínua em $[-3\pi, 3\pi]$, e seccionalmente de classe $\mathcal{C}^1$ tem-se

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } -2\pi < x < 2\pi \\ -2\pi & \text{se } x = \pm 2\pi \\ F(x+4\pi) & \end{cases}$$

(1,5 val) 5. Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u & \text{para} \quad t > 0\ ,\ x \in]0, 2\pi[\\ u(t,0) = 0\ ,\ u(t,2\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}(5x) & \text{para} \quad x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Sendo $u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$ e substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\begin{aligned} T' \cdot X &= 2T \cdot X'' - 4T \cdot X \\ \frac{T'}{2T} + 2 &= \frac{X''}{X} = -\lambda \text{ (constante)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T' + 2(\lambda + 2)T &= 0. \end{aligned}$$

Resolvido o problema de fronteira

$$X'' + X = 0, \qquad X(0) = 0 \text{ e } X(2\pi) = 0.$$

caso $\lambda = 0$: A função X é linear, $X(x) = ax = b$, e satisfaz as condições de fronteira se e só se $X(x) = 0$.

caso $\lambda \neq 0$: A função X é da forma

$$a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$

e satisfaz as condições de fronteira se e só se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) & \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}2\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Tem-se uma solução não trivial se e só se $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}2\pi) = 0$, ou seja $\lambda = n^2/4$. Obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(4+n^2/2)t}\,\mathrm{sen}(nx/2)$$

satisfaz formalmente as condições na fronteira, e usando a condição inicial obtém-se

$$u(t,x) = e^{-6t}\,\mathrm{sen}(x) - 4e^{-54t}\,\mathrm{sen}(5x).$$

Note para $\lambda < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\lambda}x) &= \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{-\lambda}x} + e^{\sqrt{-\lambda}x}}{2} \\ &= \cosh(\sqrt{-\lambda}x) \\ \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) &= \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2i} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{-\lambda}x} - e^{\sqrt{-\lambda}x}}{2i} \\ &= i\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x), \end{aligned}$$

e para $z \in \mathbb{C}$, tem-se $\mathrm{sen}(z) = 0$ se e só $z = n\pi$.

(1 val) 6. Determine duas soluções linearmente independentes da equação $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ da forma $v(t)/t$, onde $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Aproveite o resultado anterior para escrever uma matriz wronskiana da equação $y'' + \frac{3}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 0$ válida em $]0, +\infty[$.

Sendo $y = v/t$ e substituindo na equação diferencial, obtem-se

$$t^2\left[\frac{v''}{t} - 2\frac{v'}{t^2} + 2\frac{v}{t^3}\right] + 3t\left[\frac{v'}{t} - \frac{v}{t^2}\right] + \frac{v}{t} = tv'' + v' = \frac{d}{dt}(tv')$$

Logo $tv' = A$, uma constante, e $v(t) = A\ln(t) + B$. Segue-se

$$y(t) = A\frac{\ln(t)}{t} + \frac{B}{t}.$$

Assim $y_1(t) = \ln(t)/t$ e $y_2(t) = 1/t$ são soluções linearmente independentes. A matriz wronskiana é

$$\begin{bmatrix} \frac{\ln(t)}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1-\ln(t)}{t^2} & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

Note que a determinante da matriz é $-1/t^3 \neq 0$ no intervalo $]0, +\infty[$, e portanto $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes em $]0, +\infty[$.