DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

1º Teste — Versão A

(Cursos: MEQ, MEAmbi, MEEC, MEMec, LEAN, MEM, MEC)

3 de Novembro de 2018, 11h — 12h30

1. Considere $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $v(x,y) = e^{-2y}\,\mathrm{sen}(2x) + \alpha x^3 + \beta y$, onde α e β são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine os valores de α e β para os quais v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val] (b) Para $\alpha = \beta = 0$, determine a função inteira $f = u + \mathrm{i}v$ que verifica $f(0) = 1$.

[1,0 val] (c) Calcule

$$\oint_{|z|=2018} \frac{(z-\mathrm{i})^2 f(z)}{z^2}\,dz\ ,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val] 2. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log \bar{z}\,dz$$

onde o caminho γ é a semi-circunferência $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, percorrida de $z = 1$ para $z = -1$ e, para $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\log w = \log|w| + \mathrm{i} \arg w$, com $0 \leq \arg w < 2\pi$.

[1,5 val] 3. Determine a série de Maclaurin da função $f(z) = \dfrac{z^3}{5+z}$ e o respectivo domínio de validade. Aproveite o resultado para calcular $f^{(10)}(0)$.

4. Considere a função f definida no seus domínio por

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{3z^2}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{z}$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Calcule o valor de

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

onde γ é o caminho parametrizado por $z(t) = e^{-\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

[1,5 val] 5. Utilizando um integral complexo, calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^4\theta\,d\theta.$$

[1,0 val] 6. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas num ponto $p \in \mathbb{C}$ tais que $z = p$ é um zero de ordem m de $f(z)$ e é um zero de ordem $m+1$ de $g(z)$. Mostre que

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, p\right) = (m+1)\frac{f^{(m)}(p)}{g^{(m+1)}(p)}.$$