TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2015/2016

Teste 1, versão A
Cursos: MEAer, MEBiom, LEAN, LMAC, MEFT, MEMec
9 de Abril de 2016, às 9:00

1. Considere a função $u(x,y) = A^2x^2 + 2Axy - y^2$, em que x, y são variáveis reais e A é uma constante real.

(1,0 val) (a) Determine os valores de A para os quais u é a parte real de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

Resolução: Para que u seja a parte real de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ terá que ser harmónica em $\mathbb{R}^2$. Assim, e já que a função u é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ (para qualquer valor de A), tem-se que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2A^2 - 2 = 0,$$

ou seja, se e só se $A = \pm 1$.

(1,0 val) (b) Para $A = 1$, determine uma função $f(x+iy)$ holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que a parte real de f é u e $f(i) = -1$, e indique se essa função é única.

Resolução: Para determinar f há que determinar a função harmónica conjugada de $u(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$. Usando as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = 2xy + y^2 + c(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad c(x) = -x^2 + c$$

pelo que todas as possíveis harmónicas conjugadas de u são:

$$\operatorname{Im} f = v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + c \ , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Para que $f(\mathrm{i}) = -1$ é necessário e suficiente que $u(0,1) = -1$ (o que se verifica) e $v(-1,0) = 0$, o que se verifica apenas se $c = -1$. Assim,

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + 2xy - y^2 + \mathrm{i}(2xy + y^2 - x^2 - 1),$$

sendo esta solução única.

(1,0 val) (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2016/2015} \frac{\cos(f(z))}{(z-i)^2}\, dz.$$

TÉCNICO LISBOA

Resolução: Seja γ a circunferência $|z| = 2016/2015$ (percorrida uma vez no sentido directo). Uma vez que

- γ é uma curva de Jordan
- $g(z) = \cos(f(z))$ é uma função inteira (pela alínea anterior),
- i pertence à região interior a γ (pois $|\mathrm{i}| < 2016/2015$),

estamos em condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy. Assim sendo:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{\cos(f(z))}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}\,g'(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}f'(\mathrm{i})\big(-\operatorname{sen}(f(\mathrm{i}))\big)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)\Big)\big(-\operatorname{sen}(-1)\big) = 0\\ &= 2\pi\mathrm{i}(2+2\mathrm{i})\operatorname{sen}1 = 4\pi(\mathrm{i}-1)\operatorname{sen}1\end{aligned}$$

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{z-i}{z+1}$.

(1,0 val) (a) Determine a série de Maclaurin de f e a sua região de validade.

Resolução: Utilizando a série geométrica:

$$f(z) = \frac{(z+1)-(1+\mathrm{i})}{z+1} = 1-(1+\mathrm{i})\frac{1}{1+z} = 1-(1+i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

para $|z| < 1$.

(0,5 val) (b) Determine a série de Laurent de f válida para $|z-i| > \sqrt{2}$.

Resolução: Utilizando novamente a série geométrica:

$$f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})+(\mathrm{i}+1)} = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}+1}{z-\mathrm{i}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+i)^n}{(z-i)^n}. \tag{1}$$

A série converge para $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

(0,5 val) (c) Calcule $\oint_{|z|=4}\frac{f(z)}{(z-i)^6}\,dz$.

Resolução: Note que a curva $|z| = 4$ está contida na região de validade da série de Laurent (1) e i pertence ao interior da mesma. Assim, pelo teorema de Laurent:

$$\oint_{|z|=4}\frac{f(z)}{(z-i)^6}\,dz = 2\pi\mathrm{i}a_5 = 0.$$

Note que $a_5 = 0$ pois o termo $a_5(z-i)^5$ da série (1) é nulo.

3. Considere a função h definida por

$$h(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)}.$$

(1,5 val) (a) Determine e classifique as singularidades de h.

Resolução: Sendo a função h um quociente de funções analíticas em $\mathbb{C}$ então as suas possíveis singularidades são zeros de $z^2 \operatorname{sen}(\pi z)$ e apenas poderão ser pólos ou singularidades removíveis. As singularidades são:

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} \pi z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k, \ \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Estudamos primeiro a singularidade $z = 0$. Tendo em conta que:

$$\lim_{z\to 0} z^3 h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z\pi \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \underbrace{\lim_{z\to 0} \cos(\pi z)}_{=1} \lim_{z\to 0} \frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi}{\pi \cos(\pi z)} = 1$$

h tem, por isso, um pólo de ordem três na origem.
Quanto aos pontos $\pm 1, \pm 2, \ldots$, ou seja, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to k}(z-k)h(z) &= \frac{(z-k)\pi \cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{z\to k} \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2} \lim_{z\to k} \frac{z-k}{\operatorname{sen}(\pi z)} \\ &= \frac{\pi \cos(\pi k)}{k^2} \frac{1}{\pi \cos(\pi k)} = \frac{1}{k^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Isto significa que $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é um pólo simples de h.

(0.5 val) (b) Calcule

$$\oint_{|z-2|=3/2} h(z)\, dz.$$

Resolução: O caminho de integração, γ, é a circunferência de centro em 2 e raio 3/2. Para decidir quais das singularidades está em $\operatorname{int}, \gamma$, calculamos as distâncias das mesmas ao centro da circunferência. Para $k \in \mathbb{Z}$:

$$k \in \operatorname{int} \gamma \Leftrightarrow |k-2| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k-2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k < \frac{7}{2} \Leftrightarrow k \in \{1,2,3\}.$$

Temos também que todas as outras singularidades pertencem ao exterior de γ. Desta forma, e usando o teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z-2|=3/2} h(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \Big(\operatorname{Res}(h,1) + \operatorname{Res}(h,2) + \operatorname{Res}(h,3) \Big)$$

Ora, e utilizando o resultado do cálculo do último limite da alínea anterior:

$$\operatorname{Res}(h,k) = \lim_{z\to k}(z-k)h(z) = \frac{1}{k^2}.$$

Substituindo, obtém-se:

$$\oint_{|z-2|=3/2} h(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{49}{18}\pi \mathrm{i}$$

(2,0 val) 4. Utilzando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^\infty \frac{4}{(x^2+4)(4x^2+1)}\,dx$$

Resolução: Para $z \in \mathbb{C}$, considere-se $F(z) = \dfrac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}$ e para cada $R \in \mathbb{R}^+$ a curva C_R como sendo a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \ , \ \mathrm{Im} z \geq 0\}$. Dado que as singularidades de F são $2\mathrm{i}$, $\frac{\mathrm{i}}{2}$, $-\frac{\mathrm{i}}{2}$ e $-2\mathrm{i}$ e que apenas i e $\mathrm{i}/2$ estão no interior de C_R (para $R > 1$), aplicando o teorema dos Resíduos resulta que

$$\oint_{C_R} F(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\Big(\,\mathrm{Res}(F, 2\mathrm{i}) + \mathrm{Res}(F, \mathrm{i}/2)\Big)$$

Tendo em conta que

$$F(z) = \frac{4}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})4(z-\mathrm{i}/2)(z+\mathrm{i}/2)} = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}/2)(z+\mathrm{i}/2)},$$

é fácil de verificar que todas as singularidades da função $F(z)$ são pólos simples. Assim:

$$\mathrm{Res}(F, 2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})F(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} = \frac{1}{(z+2\mathrm{i})(z^2+1/4)} = -\frac{1}{15\mathrm{i}}$$

e

$$\mathrm{Res}(F, \mathrm{i}/2) = \lim_{z\to \mathrm{i}/2}(z-\mathrm{i}/2)F(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}/2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i}/2)(z^2+4)} = \frac{4}{15\mathrm{i}}$$

Concluimos que:

$$\oint_{C_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{15\mathrm{i}} + \frac{4}{15\mathrm{i}}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

Por outro lado $C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{it} \ : \ t \in [0, \pi]\}$. Desta forma

$$\oint_{C_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz = \int_{I_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz + \int_{S_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz,$$

ou seja,

$$\frac{2\pi}{5} = \int_{-R}^{R} \frac{4}{(x^2+4)(4x^2+1)}dx + \int_{S_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz.$$

Tomando o limite de ambos os membros da igualdade anterior quanto R tende para infinito:

$$\frac{2\pi}{5} = \int_{-R}^{R} \frac{4}{(x^2+4)(4x^2+1)}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{S_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz.$$

Visto que o $\mathrm{Grau}\,(z^2+4)(4z^2+1) - \mathrm{Grau}\,4 = 4 - 0 = 4 \geq 2$, então

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} \frac{4}{(z^2+4)(4z^2+1)}dz = 0$$

Finalmente, e dado que $F(x)$ é uma função par:

$$\int_0^\infty \frac{4}{(x^2+4)(4x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2+4)(4x^2+1)}dx = \frac{\pi}{5}\,.$$

(1,0 val) 5. Considere o logaritmo principal $\log(z)$. Determine o conjunto de todos os $z \in \mathbb{C}$ para os quais é válida a fórmula

$$\log(z^2) = 2\log(z).$$

Resolução: Considere a função $F(z) = \log(z^2) = 2\log(z)$; note que a fórmula é equivalente a $F(z) = 0$. O domínio de analíticidade da função $\log(z^2)$ é o conjunto dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $\arg z^2 = 2\arg z \neq \pi$, ou seja $\mathbb{C}$ excepto o eixo imaginário. Desta forma, o domínio de analiticidade de F é

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi \text{ ou } \arg z = \pm\pi/2\}$$

Em cada um dos subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$, $Q_{1,4} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, $Q_2 = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \arg z < \pi\}$ e $Q_3 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < -\pi/2\}$, a função F é analítica e

$$\frac{dF}{dz} = \frac{2z}{z^2} - 2\frac{1}{z} = 0$$

Resulta assim que F é constante em qualquer um dos referidos conjuntos. Ora, como $1 \in Q_{1,4}$,

$$F(z) = F(1) = 0,$$

para qualquer $z \in Q_{1,4}$. Identicamente, $F(z) = F(e^{3\pi i/4}) = -2\pi i$ em Q_2 e $F(z) = F(e^{-3\pi i/4}) = 2\pi i$ em Q_3.

Isto mostra que $F(z) = 0$ em $Q_{1,4}$. Além disso, o logaritmo principal é a função

$$\log(z) = \ln|z| + i\theta, \text{com } \arg z = \theta \in]-\pi, \pi].$$

Se $y > 0$, tem-se $\arg iy = \pi/2$ e $\arg(iy)^2 = \pi$. Concluimos que o conjunto onde a fórmula é válida em

$$Q_{1,4} \cup \{iy : y > 0\}.$$