TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1^{o} Semestre 2015/2016

1^{o} Teste, versão A
Resolução abreviada

(CURSOS: LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEEC, MEQ)

31 de Outubro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função real $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,y) = x^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha x \ .$$

   (a) Determine os valores de α para os quais v é a parte imaginária de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

   (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função f holomorfa em $\mathbb{C}$ de modo a que $\operatorname{Im} f = v$ e $f(-1) = -\mathrm{i}$.

   (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{e^{f(z)}}{(z+1)^2}\, dz$$

   em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2015\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

Resolução:

(a) Para que v seja a parte imaginária de uma função holomorfa em $\mathbb{R}^2$ terá que ser harmónica em $\mathbb{R}^2$. Assim, e já que a função v é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ (para qualquer valor de α), tem-se que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \pm 1$$

(b) Para determinar f há que determinar a função harmónica conjugada de v. Usando as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = -2xy + c(y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad c(y) = -2y + c$$

donde

$$\operatorname{Re} f = u(x,y) = -2xy - 2y + c \ , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Para que $f(-1) = -\mathrm{i}$ tem que se verificar que $v(-1,0) = -1$ (o que se verifica) e que $u(-1,0) = 0$ o que se verifica se $c = 0$. Assim

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = -2xy - 2y + \mathrm{i}(x^2 - y^2 + 2x)$$

(c) Dado que

- γ é uma curva de Jordan percorrida uma vez em sentido directo,
- $g(z) = e^{f(z)}$ é uma função inteira (pela alínea anterior),
- -1 pertence à região interior a γ

estamos nas condições de aplicação da Fórmula Integral de Cauchy, pelo que

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{e^{f(z)}}{(z+1)^2}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}g'(-1) = 2\pi\mathrm{i}f'(-1)e^{f(-1)} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(-1,0) + \frac{\partial v}{\partial x}(-1,0)\Big)e^{-\mathrm{i}} = 0\end{aligned}$$

(1.0 val) 2. Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1+\mathrm{i}z}dz$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = \sqrt{3}\,e^{\mathrm{i}\theta}$ com $0 \le \theta \le \pi$.

Resolução: Seja $F(z) = -\mathrm{i}\log(1+\mathrm{i}z)$, com $0 \le \arg(1+\mathrm{i}z) < 2\pi$ (isto é, utilizando o ramo-0 do logaritmo). Os pontos onde esta função não tem derivada satisfazem $\operatorname{Im}(1 + \mathrm{i}z) = 0$ e $\operatorname{Re}(1+\mathrm{i}z) \ge 0$. Tendo em conta que

$$1 + \mathrm{i}z = 1 + \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = (1-y) + \mathrm{i}x,$$

então:

$$\operatorname{Im}(1+\mathrm{i}z) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}z) \ge 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - y \ge 0 \ \Leftrightarrow \ y \le 1$$

Assim, F é analítica em $A = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y : y \le 1\}$. A curva γ (a semicircunferência $|z| = \sqrt{3}$, com $\operatorname{Im} z > 0$) está contida no domínio de analiticidade de F. Então, pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{1+\mathrm{i}z}dz &= F\big(\gamma(\pi)\big) - F\big(\gamma(0)\big) \\ &= -\mathrm{i}\log\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\log\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \\ &= -\mathrm{i}\log\left(2e^{5\pi\mathrm{i}/3}\right) + \mathrm{i}\log\left(2e^{\pi\mathrm{i}/3}\right) \\ &= -\mathrm{i}\left(\log 2 + \frac{5\pi\mathrm{i}}{3}\right) + \mathrm{i}\left(\log 2 - \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

3. Considere a função $g(z) = \dfrac{2z}{4+z^2}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 + 4 = 0\}$.

(1.0 val) (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Maclaurin de g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(0.5 val) (b) Sendo n um inteiro positivo calcule $g^{(n)}(0)$.

Resolução:

(a) Usando a série geométrica:

$$g(z) = \frac{2z}{4+z^2} = \frac{z}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Esta série converge para $g(z)$ para $\left|\left(\frac{z}{2}\right)^2\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$.

(b) Pelo resultado da alínea anterior, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, onde $a_{2n} = 0$ e $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$. Pelo teorema de Taylor, $g^{(k)}(0) = a_k k!$ para para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$. Assim:

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n k!}{2^{2n+1}} & \text{se} \quad k = 2n+1 \\ 0 & \text{se} \quad k = 2n \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} k!}{2^k} & \text{se} \quad k \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se} \quad k \text{ par} \end{cases}$$

4. Considere a função h definida no seu domínio por

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen}(3z) - 3z}{z(z-\pi)} + (z - \mathrm{i})\cos\left(\frac{2}{z-\mathrm{i}}\right).$$

(1.5 val) (a) Determine e classifique as singularidades de h, e calcule os respectivos resíduos.

(0.5 val) (b) Calcule

$$\int_\gamma h(z)\,dz,$$

onde a curva γ é parametrizada por $z(t) = i + e^{-it}/4$, com $0 \le t \le 4\pi$.

Resolução:

(a) A função h tem três singularidade isoladas:

i. uma é removível na *origem*,
ii. uma é um pólo simples no ponto π,
iii. uma é uma singularidade essencial no ponto i.

Os respectivos resídous são

$$\operatorname*{Res}_{z=0} h(z) = 0, \quad \operatorname*{Res}_{z=-\pi} h(z) = -3 \quad \text{e} \quad \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} h(z) = -2.$$

(b) Pelo teorema de resídous

$$\int_\gamma h(z)\, dz = n(\gamma, 2\mathrm{i}) \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname*{Res}_{z=2\mathrm{i}} h(z) = -2 \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot (-2) = 8\pi\mathrm{i}.$$

5. (a) Sejam g e h funções complexas, analíticas num ponto z_0 e tais que

$$g(z_0) \neq 0 \quad , \quad h(z_0) = 0 \quad , \quad h'(z_0) \neq 0 \ .$$

Mostre que a função $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ tem um pólo simples em z_0 e que

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \ .$$

(b) Calcule o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+9}\, dx \ .$$

Resolução:

(a) Utilizando o teorema de Taylor, e o facto de $h(z_0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \cdots}{h'(z_0)(z-z_0) + \frac{h''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \cdots} && (1) \\ &= \frac{1}{z-z_0} \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \cdots}{h'(z_0) + \frac{h''(z_0)}{2}(z-z_0) + \cdots} && (2) \end{aligned}$$

Em consequência, $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)} \in \mathbb{C}$ e é diferente de 0, pelo que z_0 é um pólo simples de f e $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.
Alternativamente, tendo em conta que $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, pode calcular o limite anterior da seguinte forma:

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} g(z) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)}{h(z)-h(z_0)} = g(z_0) \cdot \frac{1}{h'(z_0)}.$$

(b) Para $z \in \mathbb{C}$, considere-se $F(z) = \dfrac{z^2}{z^4+9}$ e para cada $R \in \mathbb{R}^+$ a curva C_R como sendo a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq R \ , \ \mathrm{Im} z \geq 0\}$. Dado que as singularidades de F são $\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/4}$, $\sqrt{3}e^{3\mathrm{i}\pi/4}$, $\sqrt{3}e^{5\mathrm{i}\pi/4}$ e $\sqrt{3}e^{7\mathrm{i}\pi/4}$ (as raízes quartas de -9), aplicando o Teorema dos Resíduos teremos que

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{z^4+9} dz = 2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(F, \sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/4}) + \mathrm{Res}(F, \sqrt{3}e^{3\mathrm{i}\pi/4})\Big)$$

É fácil de verificar que que a função $F(z)$ está nas condições do enunciado da alínea anterior (sendo $z_k = \sqrt{3}e^{k\mathrm{i}\pi/4}$, $k = 1, 3, 5, 7$, $g(z_k) = z_k^2 \neq 0$, $h(z_k) = z_k^4 + 9 = 0$ e $h'(z_k) = 4z_k^3 \neq 0$), podemos concluir que todas as singularidades são pólos simoles e

$$\mathrm{Res}(F, \sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/4}) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = \frac{\left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^3} = \frac{\sqrt{6}}{24}(1 - \mathrm{i})$$

e

$$\mathrm{Res}(F, \sqrt{3}e^{3\mathrm{i}\pi/4}) = \frac{g(z_3}{h'(z_3)} = \frac{\left(\sqrt{3}e^{3\mathrm{i}\pi/4}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}e^{3\mathrm{i}\pi/4}\right)^3} = \frac{\sqrt{6}}{24}(-1 - \mathrm{i})$$

Concluimos que

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$$

Por outro lado $C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{it} \ : \ t \in [0, \pi]\}$. Pelo que

$$\oint_{C_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz = \int_{I_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz + \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz$$

ou seja

$$\frac{\pi\sqrt{6}}{6} = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4 + 9} dx + \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz$$

e fazendo o limite de R para infinito

$$\frac{\pi\sqrt{6}}{6} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 9} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz$$

Visto

$$\left| \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz \right| \leq \int_{S_R} \left| \frac{z^2}{z^4 + 9} \right| |dz| \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 9}$$

conclui-se que

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz \right| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{z^2}{z^4 + 9} dz = 0$$

e finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 9} dx = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}.$$