TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2012/2013

1º Teste — Versão A

(Cursos: LEGM, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEEC, MEQ)

3 de Novembro de 2012, 8h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $u(x,y) = \alpha^3 x^3 - 3\alpha x y^2 + e^y \operatorname{sen} x$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] (a) Determine todos os valores de α para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$.

[1,0 val.] (c) Sendo f a função determinada na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{f(z) + f'(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz\ ,$$

onde γ é o caminho parametrizado por $\gamma(t) = \mathrm{i} - e^{\mathrm{i}t}$, com $0 \le t \le 2\pi$.

2. Considere a função f definida em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1/2, \mathrm{i}, 5\}$ por:

$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(2z+1)^2} + e^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}} + \frac{\mathrm{i}z}{(z-5)^4}.$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,5 val.] (b) Calcule:

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz\ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,5 val.] 3. Determine o valor de

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{4\mathrm{i}\theta}}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta\ .$$

e aproveite para deduzir o valor de

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(4\theta)}{5+4\cos\theta}\, d\theta \quad , \quad b = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{5+4\cos\theta}\, d\theta\ .$$

4. Considere a função $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno de $z = 0$ indicando a região de convergência da série.

[1,0 val.] (b) Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que $g(\mathrm{i}z) = g(z)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Calcule a derivada de ordem 4001 da função $f + g$ no ponto 0.

[1,0 val.] 5. Seja $C_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \ge 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \ge 0\}$. Mostre que

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{\mathrm{i}z^2}}{z^3}\, dz \right| \le \frac{\pi}{2R^2}.$$