Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2010/2011

9 de Abril de 2011

1º Teste - Versão A

Cursos: LEIC-A, MEEC, MEC, LEGM

Duração: 1h 30m

1. Seja $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 6x - 3x^2y + y^3 + 9y$.

[1 val.] (a) Determine uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cuja parte real é $u(x,y)$.

[1 val.] (b) Calcule $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

[1 val.] (a) Classifique todas as singularidades de $f(z)$.

[1 val.] (b) Indique a parte principal da série de Laurent de $f(z)$ em torno de cada singularidade isolada.

[1 val.] (c) Calcule $\oint_{|z|=10} f(z)\,dz$, onde a curva é percorrida uma vez (no sentido directo).

[2 val.] 3. Usando o teorema dos resíduos, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\,dx$.

4. Considere a série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{5n+1}\right)^n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - n^2}{n^4 + 3} (z - z_0)^{-n}$$

[1 val.] (a) Determine a coroa circular (isto é, a região da forma $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$) onde a série é convergente.

[1 val.] (b) Calcule $\oint_{|z-z_0|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz$, onde a curva é percorrida uma vez (no sentido inverso).

[1 val.] 5. Para quaisquer polinómios $p(z)$, $q(z)$, mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = \operatorname*{Res}_{z=0} \left[\frac{p(1/z)}{z^2 q(1/z)}\right]$$

onde $R > 0$ é suficientemente grande para que todos os zeros de $q(z)$ pertençam ao disco aberto $\{z : |z| < R\}$.