

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019, 16/1/2019

1º TESTE DE RECUPERAÇÃO/EXAME (1ª PARTE, VERSÃO B)

CURSOS: MEQ, MEM, MEAMB, MEEC, MEMEC, LENO

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = \cos(3\alpha x) \sinh(\beta y),$$

onde α e β são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine os valores de α e β de modo a que u seja a parte real de uma função inteira.

[1,0 val.] (b) Para $\alpha = 1$, $\beta = 3$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(1) = i$.

[1,0 val.] (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2019} f(z) \left((z - 2i) + \frac{1}{(z - 1)^2} \right) dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

2. Considere a função

$$f(z) = \frac{5}{z^2 - 5z}$$

[1,0 val.] (a) Determine todos os possíveis desenvolvimentos em série de Laurent de f , em torno de $z_0 = 0$, e indique as regiões onde cada um desses desenvolvimentos é válido.

[1,0 val.] (b) Aproveite a alínea anterior para obter os valores de

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^{11}} dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=8} z^7 f(z) dz.$$

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{4}{z - 6} + \frac{\operatorname{sen}(i\pi z)}{(z^2 + 1)^2} + \cos \frac{3}{z - i}.$$

[2,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f , calculando os respectivos resíduos.

[0,5 val.] (b) Calcule o valor de $\oint_{\gamma} f(z) dz$, onde γ é o caminho

$$\theta \longmapsto \operatorname{sen}(2\theta) + 2i \cos(\theta), \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi].$$

[1,5 val.] 4. Use o Teorema dos Resíduos para obter o valor de

$$\int_{-\infty}^0 \frac{4 + x^2}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ uma curva de Jordan seccionalmente regular, percorrida no sentido directo. Mostre que a área no interior de γ é dada por

$$\frac{1}{2i} \oint_{\gamma} \bar{z} dz.$$

2º TESTE DE RECUPERAÇÃO/EXAME (2ª PARTE)
Versão B

- [2,0 val.] 6. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial e indique o seu intervalo máximo de definição:

$$\operatorname{sen} x + e^y + \cos x \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(2\pi) = 0.$$

Sugestão: Comece por determinar um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$.

- [1,5 val.] 7. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (0, 1, -1)$.

8. Considere a equação diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = g(t)$$

sendo $g(t)$ uma função contínua em \mathbb{R} .

- [1,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação no caso em que $g(t) \equiv 0$.

- [1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação no caso em que $g(t) = \frac{e^{2t}}{1+t^2}$.

- [0,5 val.] (c) Indique $g(t)$ para que a equação admita t^4 como solução particular.

- [2,0 val.] 9. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 2 \quad , \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 2) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(0, x) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 5 \operatorname{sen}(7\pi x) \quad 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$$

- [1,0 val.] 10. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$$

e indique a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

- [1,0 val.] (b) Use a alínea anterior para determinar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$