TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019, 16/1/2019

1º Teste de Recuperação/Exame (1ª Parte, Versão A)

Cursos: MEQ, MEM, MEAmb, MEEC, MEMec, LENO

1. Seja $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,y) = \operatorname{sen}(\alpha x)\cosh(2\beta y),$$

onde α e β são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine os valores de α e β de modo a que v seja a parte imaginária de uma função inteira.

[1,0 val.] (b) Para $\alpha = 2,\ \beta = 1$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Im}(f) = v$ e $f(\mathrm{i}) = 1$.

[1,0 val.] (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2019} f(z)\left((z+\mathrm{i}) + \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\right) dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

2. Considere a função

$$f(z) = \frac{2}{z^2+2z}$$

[1,0 val.] (a) Determine todos os possíveis desenvolvimentos em série de Laurent de f, em torno de $z_0 = 0$, e indique as regiões onde cada um desses desenvolvimentos é válido.

[1,0 val.] (b) Aproveite a alínea anterior para obter os valores de

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{13}}\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{|z|=10} z^9 f(z)\,dz.$$

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{3}{z-5} + \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z^2-1)^2} + (z+1)\operatorname{sen}\frac{2}{z+1}.$$

[2,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[0,5 val.] (b) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)\,dz$, onde γ é o caminho

$$\theta \quad \longmapsto \quad 2\cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta), \qquad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

[1,5 val.] 4. Use o Teorema dos Resíduos para obter o valor de

$$\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(x^2+4)^2}\,dx\,.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ uma curva de Jordan seccionalmente regular, percorrida no sentido directo. Mostre que a área no interior de γ é dada por

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\oint_\gamma \bar{z}\,dz.$$

Fim do 1º Teste e da 1ª parte do Exame

2^{o} Teste de Recuperação/Exame (2^{a} Parte)

Versão A

[2,0 val.] 6. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial e indique o seu intervalo máximo de definição:

$$\cos x + e^{-y} + \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(\pi/2) = 0 \, .$$

Sugestão: Comece por determinar um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$.

[1,5 val.] 7. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 1)$.

8. Considere a equação diferencial

$$y'' + 6y' + 9y = g(t)$$

sendo $g(t)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$.

[1,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação no caso em que $g(t) \equiv 0$.

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação no caso em que $g(t) = \dfrac{e^{-3t}}{1+t^2}$.

[0,5 val.] (c) Indique $g(t)$ para que a equação admita t^3 como solução particular.

[2,0 val.] 9. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 2 \;\; , \;\; t > 0 \\ u(t,0) = u(t,2) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = 0 \, ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = -4\operatorname{sen}(5\pi x) & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

[1,0 val.] 10. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}$$

e indique a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] (b) Use a alínea anterior para determinar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Fim do 2^{o} Teste e da 2^{a} parte do Exame