DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2025/2026

2º Teste - Versão B

26 de Novembro de 2025

Cursos: LMAC e LEFT

---

1. A seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta(t) - x^5}{5x^4 t},$$

modela um fenómeno em que o factor $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $C^1(\mathbb{R})$, só tem efeito a partir de $t = 3$, da forma

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 3 \\ (t-3)^2 & \text{se} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

[3,0 val] (a) Mostre que a equação pode ser escrita na forma exacta, verificando-o.

[6,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial $x(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Solução:

(a) A equação está escrita na forma canónica, e nesse sentido pode-se já determinar o domínio da equação como sendo $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{t = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0\}$. Nesse domínio é possível escrever a equação na forma equivalente

$$\big(x^5 - \beta(t)\big) + 5x^4 t \frac{dx}{dt} = 0.$$

Escrevendo

$$M(t,x) = x^5 - \beta(t), \qquad N(t,x) = 5x^4 t,$$

ambas funções C^1 em todo o $\mathbb{R}^2$, o qual é simplesmente conexo, temos

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 5x^4 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

pelo que o campo vetorial $(M(t,x), N(t,x))$ é um campo gradiente (ou conservativo) em todo o $\mathbb{R}^2$ e portanto a equação assim escrita é exacta.

(b) Começamos por procurar um potencial escalar Φ para o campo gradiente $(M(t,x), N(t,x))$, ou seja, tal que

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = (M(t,x), N(t,x)).$$

Integrando em primeiro lugar a relação $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = N(t,x) = 5x^4 t$ em ordem a x, obtém-se

$$\Phi(t,x) = x^5 t + c(t).$$

Substituindo agora em $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M(t,x) = x^5 - \beta(t)$

$$x^5 + c'(t) = x^5 - \beta(t) \quad \Longrightarrow \quad c'(t) = -\beta(t),$$

de onde $c(t)$ é uma qualquer primitiva de $-\beta(t)$

$$c(t) = -\int \beta(t)\, dt.$$

De modo a garantir que essa primitiva é efetivamente contínua e diferenciável no ponto $t = 3$, onde se dá a ramificação da definição da função β é evidente que terá de ser

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 3 \\ -\frac{(t-3)^3}{3} & \text{se} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

eventualmente com uma constante arbitrária de primitivação a ela adicionada (a qual incluiremos na constante da solução geral implícita a seguir).

A solução geral da equação na forma implícita é assim

$$\Phi(t,x) = k \Leftrightarrow x^5 t + c(t) = k,$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Acertando agora a constante para a condição inicial imposta, verificamos que $t_0 = 1$ e como $c(t) = 0$ para $t < 3$, temos ,

$$(-1)^5 \cdot 1 - 0 = k \quad \Longrightarrow \quad k = -1.$$

Portanto a solução implícita que satisfaz o PVI é

$$x(t)^5 t + c(t) = -1,$$

E daqui, explicitando a solução, obtém-se finalmente

$$x(t) = -\sqrt[5]{\frac{1 + c(t)}{t}},$$

a qual pode ainda ser escrita, por ramos, como

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[5]{t}} & \text{se} \quad t < 3 \\ \\ -\sqrt[5]{\frac{3-(t-3)^3}{3t}} & \text{se} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Para finalmente determinar o intervalo máximo de definição, verificamos que para o passado da condição inicial em $t_0 = 1$ a solução deixa de existir em $t = 0$ devido à presença do termo $\sqrt[5]{t}$ no denominador do correspondente ramo (pelo que a solução explode para $-\infty$ quando $t \to 0^+$).

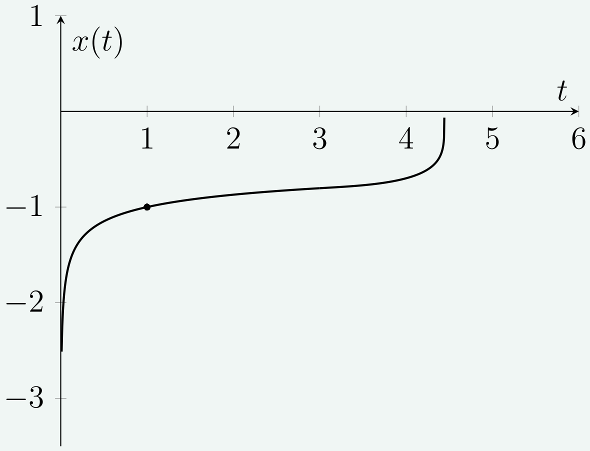
Para o futuro de $t_0 = 1$ note-se que existe um instante $t > 3$ em que $x(t) = -\sqrt[5]{\frac{3-(t-3)^3}{3t}}$ se anula

$$(t-3)^3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = 3 + \sqrt[3]{3},$$

e onde a raíz quíntica deixa de ser diferenciável, pelo que a solução deixa de ser C^1.

Observe-se que em ambos os casos, em $t = 0$ e em $t = 3 + \sqrt[3]{3} \Rightarrow x(t) = 0$, a solução sai do domínio da equação, ao convergir, respetivamente, para o eixo dos x ou para o eixo dos t, que vimos inicialmente não fazerem parte do domínio da equação $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{t = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0\}$, devido à presença do termo $x^4 t$ no denominador da equação na forma canónica

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta(t) - x^5}{5x^4 t}.$$



Assim o intervalo maximo de definição contendo $t_0 = 1$ é

$$I_{\max} =]0,\ 3 + \sqrt[3]{3}[.$$

[6,0 val] 2. Considere o problema de valor inicial

$$t^3 y' = -1 - y, \qquad y(1) = y_0.$$

Resolva-o e determine o valor de y_0 de forma a que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Solução: Começamos por observar que a equação é evidentemente linear não homogénea e que, escrita na forma canónica, é

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^3} y - \frac{1}{t^3}.$$

Começando por resolvê-la da forma habitual, procuramos um factor integrante $\mu(t) \neq 0$ tal que o lado esquerdo da equação equivalente

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)\frac{1}{t^3}y = -\mu(t)\frac{1}{t^3},$$

corresponda à derivada do produto $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y(t)$, pelo que teremos que procurar $\mu(t)$ que satisfaça a equação diferencial linear homogénea

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{t^3}\mu(t).$$

Obtemos assim

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t^3}} = e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$

A equação original pode assim ser escrita de forma equivalente como

$$\frac{d}{dt}[e^{-\frac{1}{2t^2}}y(t)] = -\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{2t^2}},$$

e integrando ambos os lados de $t_0 = 1$ até t obtemos

$$e^{-\frac{1}{2t^2}}y(t) - e^{-\frac{1}{2\cdot 1^2}}y(1) = \int_{t_0=1}^{t} -\frac{1}{s^3}e^{-\frac{1}{2s^2}}ds = e^{-\frac{1}{2\cdot 1^2}} - e^{-\frac{1}{2t^2}},$$

donde

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)}(y_0+1) - 1.$$

Finalmente, tomando o limite $t \to +\infty$ temos

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = e^{-\frac{1}{2}}(y_0+1) - 1.$$

Queremos este limite igual a 0, pelo que

$$e^{-\frac{1}{2}}(y_0+1) - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 + 1 = e^{\frac{1}{2}}$$

ou seja

$$y_0 = e^{\frac{1}{2}} - 1.$$

3. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = -1.$$

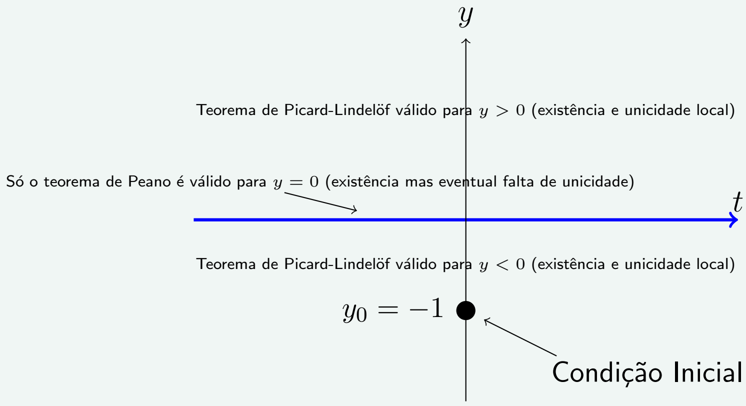
[2,0 val] (a) Estude o problema quando à existência e unicidade de solução.

[3,0 val] (b) Prove que o intervalo máximo de existência é limitado, ou seja, é do tipo $]T_-, T_+[$, com $-\infty < T_- < T_+ < +\infty$, e determine, se existirem, os limites $\lim_{t\to T_\pm} y(t)$.

Solução:

(a) A função $f(t,y) = -4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2}$, que define esta EDO, tem domínio $\mathbb{R}^2$ onde é contínua (como aliás tem de ser, por definição), por ser a diferença entre um polinómio $-4t^3(1+y^2)$, infinitamente diferenciável, e um o produto de t por uma raíz cúbica composta com y^2, todos contínuos em $\mathbb{R}^2$.

A questão subtil aqui é que o termo $\sqrt[3]{y^2}$ tem derivada infinita em $y = 0$ pelo que $f(t,y)$ não é localmente lipschitziana em ordem a y quando $y = 0$. O teorema de Picard-Lindelöf não poderá ser aplicado, por isso, para garantir unicidade caso a solução passe por $y = 0$. Nos restantes pontos $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$, ou seja, no semiplano superior $y > 0$, e no inferior $y < 0$, a função $f(t,y)$ é infinitamente diferenciável em ambas as variáveis (t,y) pelo que temos as condições de validade do teorema de Picard-Lindelöf implicando existência e unicidade local de solução nesses pontos. O teorema de Peano é válido em todo o domínio $\mathbb{R}^2$, pelo que há sempre solução, eventualmente não única se passar por $y = 0$.



No entanto, uma observação mais atenta permite ver que a condição inicial $y(0) = -1$ se encontra abaixo dos pontos problemáticos $y = 0$. Se considerarmos o subdomínio da equação apenas composto pelos pontos $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y < 0$, ou seja, todo o semiplano inferior, onde se encontra o dado inicial e onde é válido Picard-Lindelöf, veremos que a solução não sai desse domínio, pelo que ela existe e é prolongável de forma globalmente única a um intervalo máximo de definição, sempre com $y(t) < 0$. Por outras palavras, a solução existe e é globalmente única porque tem condição inicial $y_0 < 0$ e mantém-se sempre negativa, nunca cruzando a reta problemática $y = 0$.

Com efeito, para $t > 0$ tem-se $-4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2} \leq 0$ pelo que a solução é decrescente para o futuro. E para $t < 0$ tem-se $-4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2} \geq 0$ e a solução cresce de valores inferiores a -1 para t negativo, até atingir a condição inicial $y_0 = -1$ em $t = 0$ (ou, visto de outra forma, a solução também é decrescente se evoluirmos para o passado). Portanto, por Picard-Lindelöf, a solução do PVI existe, é localmente única, e prolonga-se de forma globalmente única a um intervalo máximo de definição, satisfazendo sempre, para o passado e para o futuro, $y(t) \leq -1$.

(b) Na alínea anterior já vimos, apenas analisando o sinal de $f(t,y)$, para o futuro e para o passado de t_0, como a solução é prolongável a um intervalo máximo de definição, sempre satisfazendo $y(t) \leq -1$. Veremos agora que, quer para o futuro, quer para o passado, ela explode em tempo finito com $y(t) \to -\infty$, quando t tende para os extremos do intervalo máximo de definição.

Começando com $t \geq 0$ observe-se que, neste caso, se tem

$$-4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2} \leq -4t^3(1+y^2).$$

Usando o critério de comparação de EDOs temos, portanto, que a solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = -4t^3(1+y^2), \qquad y(0) = -1,$$

se encontra sempre acima da nossa solução, para $t \geq 0$. Mas esta é uma equação separável cuja solução é facilmente obtida

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = -4t^3 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\arctan(y(t))\right] = -4t^3$$

donde, integrando de $t_0 = 0$ a $t > 0$ se obtém

$$\begin{aligned} \arctan(y(t)) - \arctan(y(0)) &= \int_0^t -4s^3 ds \\ \Rightarrow \arctan(y(t)) &= \arctan(-1) - t^4 \\ \Rightarrow y(t) &= \tan(-\pi/4 - t^4). \end{aligned}$$

Concluímos assim que a solução do nosso PVI satisfaz, para $t \geq 0$, $y(t) \leq \tan(-\pi/4 - t^4)$. Mas quando o argumento da tangente se aproxima de $-\pi/2$, esta explode para $-\infty$, pelo que quando $-\pi/4 - t^4 = -\pi/2 \Rightarrow t = \sqrt[4]{\pi/4}$ tem-se $\lim_{t \to \sqrt[4]{\pi/4}^-} \tan(-\pi/4 - t^4) = -\infty$ e conclui-se assim que a solução $y(t)$, estando abaixo, explodirá também para $-\infty$ num tempo máximo de existência para o futuro, $T_+ \leq \sqrt[4]{\pi/4}$.

Para o passado da condição inicial, ou seja, para $t \leq 0$ o raciocínio é inteiramente análogo, sublinhando-se apenas que os papéis das funções que ficam acima e abaixo se invertem: é agora a função com derivada menor que fica acima da que tem derivada maior. Mas para $t \leq 0$ tem-se $-4t^3(1+y^2) - t\sqrt[3]{y^2} \geq -4t^3(1+y^2)$ e portanto, apesar das desigualdades estarem agora trocadas, face ao caso $t \geq 0$, isso implica precisamente que para $t \leq 0$ continua a ser a função $\tan(-\pi/4 - t^4)$, agora com derivada menor, que se mantém acima de $y(t)$. A explosão ocorre agora quando $t = -\sqrt[4]{\pi/4}$ (onde voltamos a ter $-\pi/4 - t^4 = -\pi/2$).

Conclui-se assim que a solução $y(t)$ tem um intervalo máximo de existência $]T_-, T_+[$ limitado, com $-\sqrt[4]{\pi/4} \leq T_- < 0 < T_+ \leq \sqrt[4]{\pi/4}$, e que $\lim_{t \to T_\pm} y(t) = -\infty$.