DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral - III

## 1º Semestre 2025/2026

1º Teste - Versão B

15 de Outubro de 2025

Cursos: LMAC e LEFT

## INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: 45 minutos.

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 - x_1 x_5 - x_3 = 0, \quad x_1^2 - x_4 + x_5^2 = 0\}.$$

[2,0 val] (a) Prove que $M$ é uma variedade e indique a sua dimensão $d$.

[2,0 val] (b) Indique uma parametrização (global) para $M$.

[3,0 val] (c) Determine os espaços tangente $T_pM$ e normal $N_pM = (T_pM)^\perp$ a $M$ no ponto $p = (1, 0, 0, 1, 0)$, indicando uma base para cada um deles.

[2,0 val] (d) Determine o elemento de volume $d$-dimensional correspondente à parametrização escolhida em (b) no ponto $p = (1, 0, 0, 1, 0)$.

2. Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 1, -x)$.

[5,0 val] (a) Justifique que $\mathbf{F}$ admite um potencial vetorial e determine um exemplo com a segunda componente nula.

[6,0 val] (b) Utilizando o teorema de Stokes, e o potencial da alínea anterior, determine o valor do fluxo de $\mathbf{F}$ através de qualquer superfície com bordo no cilindro $x^2 + z^2 = 9$, da forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \psi(x, z), \quad x^2 + z^2 \leq 9\},$$

com $\psi$ de classe $C^1$, e normal unitária com segunda componente positiva, provando que esse valor é invariante, ou seja, que não depende de $\psi$.

[5,0 val] (b') (Alternativa, caso não tenha conseguido determinar o potencial em (a)) Resolva a alínea anterior usando o teorema da divergência.