Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2025/2026

1º Teste - Versão A

15 de Outubro de 2025

Cursos: LMAC e LEFT

---

1. Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -z, y)$.

[5,0 val] (a) Justifique que $\mathbf{F}$ admite um potencial vetorial e determine um exemplo com a primeira componente nula.

[6,0 val] (b) Utilizando o teorema de Stokes, e o potencial da alínea anterior, determine o valor do fluxo de $\mathbf{F}$ através de qualquer superfície com bordo no cilindro $y^2 + z^2 = 4$, da forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \phi(y, z), \quad y^2 + z^2 \leq 4\},$$

com ϕ de classe C^1, e normal unitária com primeira componente positiva, provando que esse valor é invariante, ou seja, que não depende de ϕ.

[5,0 val] (b') (Alternativa, caso não tenha conseguido determinar o potencial em (a)) Resolva a alínea anterior usando o teorema da divergência.

Solução:

(a) O campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -z, y)$ é infinitamente diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^3$, que é evidentemente um conjunto em estrela (centrado em qualquer ponto), e tem-se:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(-z)}{\partial y} + \frac{\partial(y)}{\partial z} = 0.$$

Temos portanto garantidas as condições suficientes que garantem a existência de potencial vectorial $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (não único) tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Tal como sugerido podemos, em particular, determinar um potencial vectorial $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ que tem a primeira componente nula, $A_1 = 0$.
Calculando então o rotacional de $\mathbf{A} = (0, A_2, A_3)$ e igualando a $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -z, y)$ temos

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, -\frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) = (1, -z, y),$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1, \\ \frac{\partial A_3}{\partial x} = z, \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = y. \end{cases}$$

Começando pela última componente

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = y \Rightarrow A_2(x,y,z) = xy + \alpha(y,z),$$

para alguma função $\alpha(y,z)$ que determinaremos no fim. A seguir primitivamos a segunda componente

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = z \Rightarrow A_3(x,y,z) = xz + \beta(y,z),$$

para alguma outra função $\beta(y,z)$. Finalmente, passamos à primeira componente, que nos permite determinar α e β,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 1.$$

Temos agora liberdade de escolher α e β como quisermos, desde que satisfaçam esta última condição. Fazemos, para simplificar ao máximo, $\alpha = 0$ e restará assim apenas a condição

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = 1,$$

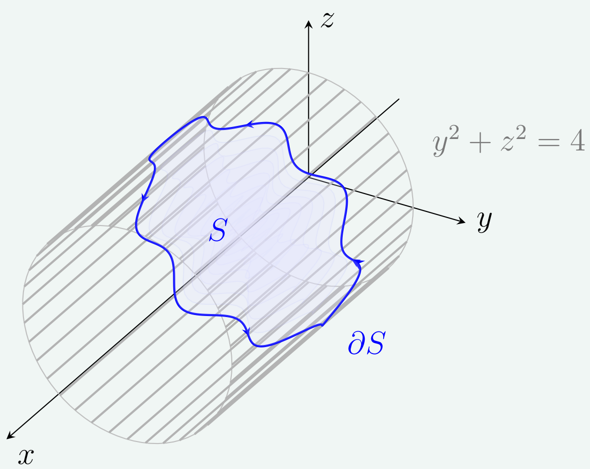
pelo que poderemos fazer simplesmente $\beta(y,z) = y$ e assim obter um potencial vectorial

$$\mathbf{A}(x,y,z) = (0, xy, xz + y).$$

(b) Na sequência da alínea anterior, $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, pelo que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de qualquer superfície S do tipo indicado é o fluxo do rotacional de $\mathbf{A}$ e isso permite-nos usar o teorema de Stokes:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\gamma,$$

em que o integral de linha no bordo ∂S é percorrido com a orientação induzida pela normal unitária ν. Visto que é dito que a normal tem a primeira componente positiva, ou seja apontando no sentido positivo do eixo dos xx, a orientação do integral de linha será no sentido anti-horário no plano yz.



O bordo ∂S é a imagem da circunferência $y^2 + z^2 = 4$ através da função $x = \phi(y,z)$, ou seja, podemos definir uma parametrização, com a orientação atrás descrita, por

$$\gamma(\theta) = (\phi(2\cos\theta, 2\sin\theta), 2\cos\theta, 2\sin\theta).$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. A primeira componente $x(\theta) = \phi(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ depende de ϕ mas, como veremos de seguida, não terá influência no resultado. A derivada da parametrização é

$$\gamma'(\theta) = (x'(\theta), -2\sin\theta, 2\cos\theta).$$

Usando o potencial calculado na alínea anterior $\mathbf{A} = (0, xy, xz + y)$, o integral de linha no bordo da superfície é então

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta.$$

Calculando o produto interno

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) &= \big(0,\ x(\theta)2\cos\theta,\ x(\theta)2\sin\theta + 2\cos\theta\big) \cdot \big(x'(\theta), -2\sin\theta, 2\cos\theta\big) \\ &= 4\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Portanto, toda a dependência em $x(\theta)$, ou seja, na função $\phi(y, z)$ que define a superfície S, anula-se e ficamos apenas com

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\, d\theta = 4\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 4\pi.$$

Isto mostra, portanto, que não existe dependência em ϕ no valor do fluxo, que é igual a 4π para qualquer superfície S do tipo indicado.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2^2 - x_5^2 = 0, \quad x_3 + x_2x_5 - x_4 = 0\}.$$

[2,0 val] (a) Prove que M é uma variedade e indique a sua dimensão d.

[2,0 val] (b) Indique uma parametrização (global) para M.

[3,0 val] (c) Determine os espaços tangente T_pM e normal $N_pM = (T_pM)^\perp$ a M no ponto $p = (1, 0, 0, 0, 1)$, indicando uma base para cada um deles.

[2,0 val] (d) Determine o elemento de volume d-dimensional correspondente à parametrização escolhida em (b) no ponto $p = (1, 0, 0, 0, 1)$.

Solução:

(a) Considerando a função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, infinitamente diferenciável (por ser polinomial) dada por

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2^2 - x_5^2, x_3 + x_2x_5 - x_4),$$

provaremos que M é uma variedade infinitamente diferenciável de dimensão 3, em $\mathbb{R}^5$, com recurso à definição através do conjunto de nível nulo de $\mathbf{F}$. Escolhendo $\mathbb{R}^5$ como o aberto (bola da raio infinito) com a qual intersetamos M para, globalmente provar que é variedade. Vemos obviamente que $M \cap \mathbb{R}^5 = M$ e que, portanto,

$$M = M \cap \mathbb{R}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathbf{0}\}.$$

Por outro lado, a matriz jacobiana $D\mathbf{F}$ é dada por

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_5} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2x_2 & 0 & 0 & -2x_5 \\ 0 & x_5 & 1 & -1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Em qualquer ponto de M, a primeira e terceira (ou quarta) colunas da jacobiana são claramente linearmente independentes. Assim $D\mathbf{F}$ tem característica máxima, igual a 2, em todos os pontos de M. Portanto M é uma variedade diferenciável de classe C^∞ de dimensão

$$d = 5 - 2 = 3.$$

(b) Escrevendo os pontos de M, ou seja, os pontos de $\mathbb{R}^5$ que satisfazem $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathbf{0}$ na forma do sistema

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + x_5^2, \\ x_3 = x_4 - x_2 x_5. \end{cases}$$

torna-se evidente que M é um gráfico global, em $\mathbb{R}^5$, de uma função de $\mathbb{R}^3$, nas variáveis (x_2, x_4, x_5), para $\mathbb{R}^2$, nas variáveis (x_1, x_3). Assim, podemos imediatamente definir uma parametrização global $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ dada por

$$\mathbf{g}(u_1, u_2, u_3) = \big(u_1^2 + u_3^2,\ u_1,\ u_2 - u_1 u_3,\ u_2,\ u_3\big),$$

a qual, tendo sido definida a partir dum gráfico global de uma função polinomial, infinitamente diferenciável, de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$, satisfaz necessariamente as condições de bijectividade, inversa contínua e matriz jacobiana de característica máxima.

(c) O espaço normal N_pM é gerado pelas linhas independentes de $D\mathbf{F}(p)$. Avaliando em $p = (1, 0, 0, 0, 1)$ obtemos

$$D\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada linha de $D\mathbf{F}(p)$ é um vetor normal (em $\mathbb{R}^5$) a M em $p = (1, 0, 0, 0, 1)$. Assim podemos tomar como base de N_pM os dois vetores

$$\mathbf{n_1} = (1, 0, 0, 0, -2), \qquad \mathbf{n_1} = (0, 1, 1, -1, 0),$$

e portanto o espaço normal a M, em p, é o espaço vetorial de dimensão 2 gerado por estes dois vetores

$$N_pM = \{\alpha(1, 0, 0, 0, -2) + \beta(0, 1, 1, -1, 0) = (\alpha, \beta, \beta, -\beta, -2\alpha) : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço tangente T_pM é o complemento ortogonal de N_pM, ou seja, é o espaço das soluções de

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{n_1} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{n_2} \rangle = 0.$$

Escrevendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, as equações são

$$\begin{cases} v_1 - 2v_5 = 0, \\ v_2 + v_3 - v_4 = 0. \end{cases}$$

Podemos escolher 3 variáveis livres (dimensão do espaço tangente igual à da variedade M), por exemplo v_2, v_4, v_5 e escrevendo as outras em função destas:

$$v_1 = 2v_5, \qquad v_3 = v_4 - v_2.$$

Fazendo agora três escolhas independentes para v_2, v_4 e v_5, por exemplo $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ obtemos 3 vetores tangente linearmente independentes (uma base de T_pM)

$$\mathbf{v_1} = (0,1,-1,0,0), \quad \mathbf{v_2} = (0,0,1,1,0), \quad \mathbf{v_3} = (2,0,0,0,1).$$

Logo, T_pM é o correspondente espaço vetorial de dimensão 3 gerado por esta base

$$T_pM = \{\alpha(0,1,-1,0,0)+\beta(0,0,1,1,0)+\gamma(2,0,0,0,1) = (2\gamma, \alpha, -\alpha+\beta, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Observação: Obviamente também se poderia obter uma base do espaço tangente pelas 3 colunas linearmente independentes, em p, da matriz jacobiana da parametrização determinada na alínea anterior

$$D\mathbf{g}(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 & 2u_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -u_3 & 1 & -u_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, tendo em conta que o ponto $p = (1,0,0,0,1)$ da variedade M corresponde às coordenadas $(u_1,u_2,u_3) = (0,0,1)$ da parametrização $\mathbf{g}$, resulta na matriz jacobiana

$$D\mathbf{g}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

levando exatamente aos mesmos 3 vetores de base de T_pM.

(d) O elemento de volume 3-dimensional da parametrização $\mathbf{g}$ é dado por

$$\sqrt{\det\left(D\mathbf{g}^T D\mathbf{g}\right)}.$$

No final da alínea anterior já obtivemos a matriz $D\mathbf{g}$ no ponto $(u_1,u_2,u_3) = (0,0,1)$ correspondente ao ponto $p = (1,0,0,0,1)$ da variedade M

$$D\mathbf{g}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos então a matriz da métrica $G = D\mathbf{g}^T D\mathbf{g}$ e o seu determinante, a qual corresponde à matriz 3×3 dos produtos internos dos vetores de base do espaço tangente, correspondentes às colunas de $D\mathbf{g}$.

$$G = D\mathbf{g}^T D\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle & \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} \rangle \\ \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_2} \rangle & \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \rangle \\ \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1} \rangle & \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2} \rangle & \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_3} \rangle \end{pmatrix}$$

com $\mathbf{v_1} = (0, 1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, 0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v_3} = (2, 0, 0, 0, 1)$.
Portanto

$$G = D\mathbf{g}^T D\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

O determinante de G é

$$\det G = 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot (4 - 1) = 5 \cdot 3 = 15.$$

Assim o elemento de volume (fator de escala) da parametrização g no ponto $p = (1, 0, 0, 0, 1)$ é

$$\sqrt{\det G} = \sqrt{15}.$$