Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semanas 8 e 9 - 10 a 21 de Novembro de 2025

1. Calcule as primeiras iterações de Picard para o problema de Cauchy $y' = t^2 + y^2$, com $y(0) = 0$.

2. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \ , \end{cases}$$

   (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

   (b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

   (c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

4. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\left(u(t)\right)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2) \quad , \quad y(1) = 0 \tag{1}$$

   (a) Determine a solução de (1) e indique o seu intervalo máximo de solução.

   (b) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0$$

      (i) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.

      (ii) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim\limits_{t \to \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

      Sugestão: Começe por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (1).

6. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y).$$

   (a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.

   (b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.

   (c) Mais geralmente mostre que $|y(t) - y_0| \leq |t - t_0|$ para todo o t.

   (d) Determine os intervalos máximos de definição das soluções desta equação.

7. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de 0, $]-\alpha, \alpha[$ para algum $\alpha > 0$.

   (b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

   (c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1(]-\alpha, \alpha[)$.