

Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 7 - 16 a 22 de Outubro de 2025

1. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as.
2. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \sin y$

3. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

- a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.
- b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

4. Considere a equação diferencial

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidas e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

5. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \quad (1)$$

- (a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.
- (b) Determine a solução da equação (1).

6. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty},$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

7. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \quad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

8. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

- a) Verifique que (2) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.
- b) Prove que as soluções de (2) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

- c) Determine a solução de (2) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

9. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

- a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.
- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.
- c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

10. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \sin(t) + x' = 0 \quad (3)$$

Mostre que a equação não é exacta. Determine um factor integrante para a equação (3), e com ele a solução que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

11. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left(\frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

12. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4)$$

- a) Mostre que (4) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.
- b) Mostre que a solução de (4) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.
- c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1 , da solução dada implicitamente na alínea anterior.