

Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 6 - 9 a 15 de Outubro de 2025

1. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$$

onde a e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$ que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

Mostre que qualquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

2. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $x^3 + (y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$,

b) $\varphi' = e^{\varphi-t}$,

c) $xy + (1 + x^2)y' = 0$,

d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$,

e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$,

f) $(1 + t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1 + t)^{5/2}$.

3. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta$, $\varphi(1) = \alpha$ e determine para que valores de α é que a solução está definida para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.
4. Considere a equação diferencial separável $x' = x \sin t + x^2 \sin t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.