

# Cálculo Diferencial e Integral - III

## Problemas propostos

**Semana 4 - 25 de Setembro a 1 de Outubro de 2025**

1. Confirme a validade do teorema de Stokes quando aplicado ao campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

e à superfície  $S$ , que consiste do hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva.

2. Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional  $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS$  sendo

- (a)  $S$  é a porção do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  que se encontra no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , em que se considera a normal  $\nu$  com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

- (b)  $S$  é o hemisfério  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ , em que se considera a normal  $\nu$  com primeira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1)z, -y).$$

- (c)  $S$  é a parte do plano  $x+z=1$  no interior do cilindro  $x^2+y^2=1$ , em que se considera a normal  $\nu$  com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y).$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral  $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS$  num integral de linha e calcule-o, sendo:

- (a)  $S$  a superfície  $z = x^2 + y^2$  com  $z \leq 1$ , sendo  $\nu$  a normal com componente  $z$  positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, 0).$$

- (b)  $S$  a superfície parametrizada por  $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$ ,  $u + v < 1$ , sendo  $\nu$  a normal com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\gamma$ , em que:

- (a)  $C$  é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  com o plano  $y = z$ , percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, -z, y).$$

- (b)  $C$  é a curva de intersecção do plano  $x + z = 5$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ , percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 2z, 3y).$$

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial  $\mathbf{F}$  ao longo da curva  $C$ , sendo:

- (a)  $C$  é a fronteira do polígono de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 1)$ , e  $(0, 2, 1)$  (percorridos neste sentido) e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, 2xy, 4y^2).$$

- (b)  $C$  o bordo da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, 0 < x < 1 \right\},$$

com a orientação induzida por uma parametrização à sua escolha, e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

- (c)  $C$  é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3).$$

6. Sendo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, \cos(x^2 + y^2 + z^2))$ , calcule o fluxo de  $\text{rot } \mathbf{F}$  através da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = x^2 + y^2 - 1 < 3 \right\}$$

no sentido da normal com terceira componente negativa.

7. Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, y - x, z - xy)$$

- (a) Use o Teorema de Stokes para determinar a circulação em torno do triângulo de vértices  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ , orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante.

- (b) Calcule a densidade de circulação de  $\mathbf{F}$  na origem na direção de  $\mathbf{e}_3$ , ou seja,

$$\text{rot } \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{e}_3$$

- (c) Encontre o vector unitário  $\nu$  tal que a densidade de circulação de  $\mathbf{F}$  na origem seja máxima na direção de  $\nu$ .

8. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

- (a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy - 2)$
- (b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \sin z, y \sin z, \cos z)$

9. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  tal que  $n_y < 0$ .

- (a) Calcule a área de  $S$ .
- (b) Calcule o fluxo de  $\mathbf{G}(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$  através de  $S$  no sentido de  $\vec{n}$ , utilizando o teorema da divergência.
- (c) Calcule o fluxo de  $\mathbf{G}(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$  através de  $S$  no sentido de  $\vec{n}$ , utilizando o teorema de Stokes.

10. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2; x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (a) Parametrize a superfície  $S$ .
- (b) Calcule a área de  $S$ .
- (c) Considere o campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$  e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

no sentido horário quando visto do ponto  $(10, 10, 10)$ , usando o Teorema de Stokes.

- (d) Determine o fluxo de  $\mathbf{G}(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3z + 2)$  através de  $S$  no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o Teorema da Divergência.

11. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1; x > 0\},$$

orientada com a normal unitária  $\nu$  à sua escolha. Seja  $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 2z, 2xy)$ . Calcule o fluxo  $\int_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$

- (a) Pelo teorema da divergência.
- (b) Pelo teorema de Stokes.

12. Suponha que  $S$  é uma superfície e  $C$  o seu bordo, satisfazendo as hipóteses do teorema de Stokes, e  $f$  e  $g$  têm derivadas parciais contínuas de segunda ordem. Demonstre que

- i)  $\oint_C (f \nabla g) \cdot d\gamma = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \nu dS.$
- ii)  $\oint_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\gamma = 0.$