

Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 2 - 11 a 17 de Setembro de 2025

1. Calcule a área da superfície dada por:

- (a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u > 0$, $v > 0$ e $u + v < 1$.
- (b) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ e $u^2 + v^2 < 1$.
- (c) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z > \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ e $u^2 + v^2 < 4$.
- (e) $r(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ e $u^2 + 4v^2 < 1$.
- (f) Porção da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 < 4$ e acima do plano xOy .
- (g) Porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.
- (h) Superfície parametrizada por $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 < u < 1$, $0 < v < 2$.

2. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (uv, u + v, u - v)$$

- (a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença à superfície
- (b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2 + v^2 < 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

3. Considere a superfície do toro para $z > 0$ dado pela equação cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,$$

com $0 < r < R$.

- (a) Determine a sua área.
- (b) Calcule o integral do campo escalar $f(x, y, z) = z$ sobre esta superfície.

4. Calcule a massa, o centro de massa e o momento de inércia relativamente ao eixo dos yy da superfície

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2, \quad |y| < 1, \quad 0 < x < 1\},$$

com densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$.

5. Parametrize a variedade

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + x - z^2 = 0, \quad y^3 + w = 0\},$$

e determine o elemento de área dessa parametrização.

6. Considere a variedade de dimensão 3 em \mathbb{R}^5 , formada pelo produto cartesiano $\mathbb{S}_R^2 \times \mathbb{S}_r^1$ entre uma esfera de raio R em \mathbb{R}^3 e uma circunferência de raio r em \mathbb{R}^2 . Determine o seu volume.

7. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução que resulta da rotação, em torno do eixo dos zz , duma curva Γ de Jordan, ou seja, simples e fechada, definida no plano radial ρOz , em que $\rho > 0$ é a coordenada radial.

(a) Mostre que a área da superfície S é dada pela expressão

$$A(S) = 2\pi \oint_{\Gamma} \rho \, ds,$$

(b) Use o resultado anterior para mostrar que a área da superfície de um toro de raios $0 < r < R$ é $4\pi^2 Rr$.

8. Mostre que a área do gráfico de um campo vetorial diferenciável $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, visto como uma superfície em \mathbb{R}^4 , é dada por

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \, dxdy.$$

E para uma função $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow f(x, y, z) \in \mathbb{R}$? Qual seria a fórmula do volume tridimensional do seu gráfico em \mathbb{R}^4 ?