Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 12 - 9 a 12 de Dezembro de 2025

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

   a) $y''' - 2y'' = 0$

   b) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

   c) $(D-3)^3(D^2 - 4D + 8)^2 D^4 y = 0$

2. Obtenha as equações lineares homogéneas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de menor ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

   a) $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$.

   b) $\cosh x, \operatorname{senh} x, \cos x, \operatorname{sen} x$.

   c) $1, x, e^x$.

3. Resolva os problemas de valor inicial:

   a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

   b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

   c) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

4. Determine a solução geral de cada uma das equações:

   a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$,

   b) $y'' - 2y' + y = te^t$,

   c) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\operatorname{sen} t$,

   d) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$,

   e) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{t}$,

   f) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^t)$.

5. Determine a solução da equação linear:

$$y''' - 2y'' + y' - 2 = b(t)$$

   que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$$

   quando:

(i) $b(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $b(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(iii) $b(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

6. Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

7. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

8. Considere a equação

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to \infty$.

9. Considere a equação

$$y'''' + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$$

a) Mostre que $y(t) = te^{-t}$ é uma solução da equação anterior.

b) Determine a solução geral.

c) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções limitadas em $]-\infty, 0]$.

d) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \to +\infty$.

10. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução periódica, que não seja identicamente nula?

11. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}.$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Escreva a solução geral dessa equação homogénea.

(b) Ache a solução do problema de valor inicial $y(2) = 1, \ y'(2) = -1$.