# Cálculo Diferencial e Integral - III

## Exemplos de Resoluções

**Semanas 8 e 9 - 10 a 21 de Novembro de 2025**

1. Estude a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dt} = |y|,$$

relativamente à existência e unicidade de soluções. Determine-as explicitamente.

**Resolução:** A equação é dada pela função $f(t, y) = |y|$, com domínio $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. É evidentemente uma função contínua nesse domínio, mas não é diferenciável em $y = 0$. Pareceria que não se poderia aplicar o teorema de Picard-Lindelöf, mas no entanto $|y|$ é o exemplo clássico de função localmente lipschitziana, não diferenciável.

De facto,

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| = ||y| - |\tilde{y}|| \leq |y - \tilde{y}|,$$

pela desigualdade triangular, para quaisquer $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$. Pelo que se conclui que $f(t, y) = |y|$ é localmente lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a 1.

Aplicando então o teorema de Picard-Lindelöf, conclui-se assim que, para qualquer condição inicial $y(t_0) = y_0$ a equação diferencial ordinária dada tem solução local única, a qualquer é prolongável a um intervalo máximo de definição.

Para obter fórmulas explícitas para as soluções, comecemos por notar que a solução nula $y(t) = 0$ é a única solução para dados iniciais nulos. As restantes soluções ou são sempre positivas, ou são sempre negativas porque, devido à unicidade, não podem cruzar a solução nula.

Para $y > 0$ a equação fica

$$\frac{dy}{dt} = y,$$

cujas soluções são $y(t) = ce^t$, com $c > 0$, definidas para todo o $t \in ]-\infty, +\infty[$.

Para $y < 0$ a equação fica

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

cujas soluções são $y(t) = ce^{-t}$, com $c < 0$, definidas para todo o $t \in ]-\infty, +\infty[$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} = 2y^2 \qquad , \qquad y(0) = 1$$

(a) Resolva o problema e indique o intervalo máximo de existência de solução.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2t\log(t+e)\,y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)} \qquad , \qquad y(0) = 1$$

existe, é única e existe um $0 < T \leq 1$ tal que $\lim_{t\to T^-} y(t) = +\infty$.

**Resolução:**

(a) A equação diferencial é separável. Uma solução trivial é $y(t) = 0$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, mas não é a que satisfaz a condição inicial indicada. Todas as soluções não nulas, incluindo a do problema de valor inicial indicado, satisfazem (dividindo a equação por $y(t) \neq 0$)

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dt} = 2t^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{y(t)}\right) = 2t,$$

ou seja

$$-\frac{1}{y(t)} = t^2 + C.$$

Impondo a condição inicial, obtemos, com $y = 1$ e $t = 0$,

$$-\frac{1}{1} = 0 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -1,$$

pelo que a solução é dada por

$$y(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Assim, o intervalo máximo de existência desta solução é $t \in ]-1, 1[$.

(b) Seja $f(t,y) = 2t\log(t+e)\,y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)}$. Como $f(t,y)$ é de classe $C^\infty$ na região $(t,y) \in ]-e, +\infty[\times\mathbb{R}$, o teorema de Picard garante que existe uma única solução local do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2t\log(t+e)\,y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)} \quad = f(t,y) \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Assim, esta solução $u(t)$ (a qual não nos interessa explicitar) está definida num intervalo da forma $]a, b[$, com $a < 0 < b$. Pelo teorema de prolongamento de soluções a intervalos máximos, seja $T$ o valor máximo que $b$ pode tomar por prolongamento da solução $u(t)$. Pretendemos mostrar que $0 < T \leq 1$ e que $\lim_{t\to T^-} u(t) = +\infty$.

Pela alínea anterior, a função $\frac{1}{1-t^2}$ é a solução do PVI $\frac{dy}{dt} = 2ty^2$, $y(0) = 1$. Por outro lado, para qualquer $t \geq 0$ e qualquer $y$ real, temos as seguintes desigualdades

$$2ty^2 \leq 2t\log(t+e)\,y^2 \leq 2t\log(t+e)\,y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)} = f(t,y).$$

Assim, a solução $u(t)$ do PVI (1) verifica

$$\frac{1}{1-t^2} \leq u(t).$$

Como $\lim_{t\to 1^-} \frac{1}{1-t^2} = +\infty$, isto implica que $T \in ]0,1]$ e que $\lim_{t\to T^-} u(t) = +\infty$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ e $y_0 \geq 0$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = yf(t,y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Mostre que este problema tem uma única solução numa vizinhança de t=0.

(b) Mostre que, se $f$ for limitada, então a solução da alínea anterior está definida para todo o $t \geq 0$.

**Resolução:**

(a) Como $f(t,y)$ é de classe $C^1$, o produto $yf(t,y)$ também é de classe $C^1$ nas duas variáveis $t$ e $y$, pelo que, em particular, é contínua em $(t,y)$ e localmente lipschitziana relativamente à variável $y$. Pelo teorema de Picard-Lindelöf conclui-se que o problema de valor inicial indicado tem solução única (pelo menos) numa vizinhança de $t=0$.

(b) Seja $I^+$ a intersecção do intervalo máximo de definição da solução $y(t)$ da alínea anterior com $[0,+\infty[$. Como o domínio de $f$ é $\mathbb{R}^2$, $I^+$ só não será igual a todo o intervalo $[0,+\infty[$ se a solução explodir quando $t \to T^-$, para algum $T \in ]0,+\infty[$. Como $y_0 \geq 0$, segue-se, pelo teorema de comparação de soluções de EDOs, que em $I^+$ a solução $y(t)$ será maior ou igual que a solução $u(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u' = uf(t,u) \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Mas $u(t)=0$ é evidentemente a solução, única, deste último problema, pelo que se conclui que $y(t) \geq 0$ em $I^+$. Por outro lado, sendo $f$ limitada, tem-se $|f(t,y)| \leq M$, para algum $M>0$, e atendendo a que $y(t) \geq 0$, vemos, de novo pelo teorema de comparação de soluções de EDOs, que $y(t)$ será menor ou igual que a solução de

$$\begin{cases} v' = Mv \\ v(0) = y_0, \end{cases}$$

a qual é explicitamente dada por $v(t) = y_0 e^{Mt}$. Conclui-se assim que

$$0 \leq y(t) \leq y_0 e^{Mt},$$

para todo o $t \in I^+$. Portanto $y(t)$ não explode em $I^+$ pelo que só poderá ser $I^+ = [0,+\infty[$.

4. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - \cos(te^y) + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Mostre que admite solução única localmente e que existe $\alpha \in ]0,1]$ tal que

$$\lim_{t\to\alpha^-} y(t) = +\infty.$$

**Resolução:** Sendo $f(t,y) = y^2 - \cos(te^y) + 1$ é óbvio que $f$ está definida em todo o $\mathbb{R}^2$ e é infinitamente diferenciável, nas duas variáveis, em todos os pontos desse domínio, por ser uma soma de funções infinitamente diferenciáveis (uma delas uma composta de uma trigonométrica com o produto de $t$ por uma exponencial). Por outro lado, $f$ é localmente lipschiztiana relativamente à variável $y$, visto que sendo infinitamente diferenciável, é em particular $C^1$ nessa variável. O teorema de Picard-Lindelöf garante assim existência e unicidade da solução do problema de valor inicial, numa vizinhança pelo menos do instante inicial $t_0 = 0$.

Usaremos agora o teorema de comparação para provar a explosão da solução para algum tempo $\alpha \in ]0,1]$. Assim, $f(t,y) \geq y^2$, para todo o $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Considerando, para comparação, o PVI

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1,$$

obtém-se facilmente (a equação é separável) a solução (única)

$$u(t) = \frac{1}{1-t},$$

evidentemente definida para $t \in ]-\infty, 1[$. Pelo que se conclui que

$$y(t) \geq u(t) = \frac{1}{1-t},$$

para $t$ na interseção do intervalo máximo de definição de $y(t)$ com $]0,1[$. Ora, como

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty,$$

conclui-se portanto que, por estar acima, também se terá $\lim_{t\to\alpha^-} y(t) = +\infty$ para algum $0 < \alpha \leq 1$.